

УДК 665.75

## ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В КОНВЕРГЕНТНО- ДИВЕРГЕНТНЫХ КАНАЛАХ ТЕПЛООБМЕННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Г.Р. Галиуллина, Г.Р. Халитова, Е.К. Вачагина

*Лаборатория теплофизических исследований Исследовательского центра проблем энергетики  
Казанского научного центра Российской академии наук, Казань, Россия*

**Введение.** Во многих отраслях химического и нефтехимического производства используются материалы, характеризующиеся наличием сложных реологических свойств, в частности наличием вязкоупругих эффектов. Подобные реологические особенности поведения рабочих сред приводят к усложнению расчетов процессов теплообмена и затруднению в выборе оптимальных параметров, обеспечивающих заданные режимы работы технологического оборудования, в частности теплообменных аппаратов. Конвергентно-дивергентные каналы широко распространены в качестве основных элементов теплообменных аппаратов при переработке реологически сложных сред. Именно поэтому разработка математических моделей и методики расчета теплообмена при течении вязкоупругих сред в каналах такого типа является весьма актуальной задачей.

**Постановка задачи.** Постановка задачи о теплообмене при течении вязко-упругой жидкости в конвергентно-дивергентных каналах проводилась при следующих допущениях: течение несжимаемой жидкости стационарное, ламинарное; реологическое поведение сред характеризуется наличием вязко-упругих и нелинейно-вязких свойств; плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность среды в ходе процесса меняются незначительно; силы тяжести входят в уравнения неявно через избыточное давление. Геометрическая область течения представляет собой периодически повторяющиеся конвергентные и дивергентные каналы, образованные пластинами. Поперечное сечение такой геометрической области, представлено на рис.1.

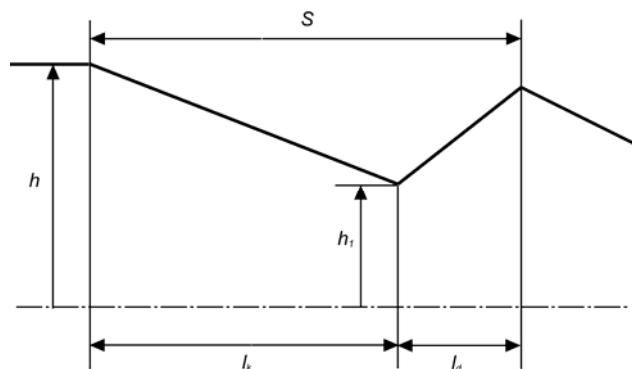


Рис.1. Геометрическая область  $\Omega$  определения переменных.

Для описания реологических свойств жидкости будем использовать модель дифференциального типа. При этом тензор напряжений  $T$  в момент времени  $t$  является функцией кинематических тензоров Уайта-Метцнера первого и второго порядков ( $B_1$  и  $B_2$ ) [1]:

$$T = -PI + \varphi_1(I_2)B_1 + \varphi_2(I_2)B_2, \quad (1)$$

где  $P$  – давление;  $I$  – единичный тензор;  $B_1 = 2D$  – тензор Уайта-Метцнера первого порядка;  $B_2 = \frac{dB_1}{dt} - \left( B_1 \cdot (\text{grad} \vec{v})^T + ((\text{grad} \vec{v}) \cdot B_1) \right)$  – тензор Уайта-Метцнера второго порядка;  $D = \frac{1}{2} \left( \text{grad} \vec{v} + (\text{grad} \vec{v})^T \right)$  – тензор скоростей деформаций;  $\vec{v}$  – вектор скорости;  $\varphi_1(I_2), \varphi_2(I_2)$  – материальные функции, отражающие наличие нелинейно-вязких и вязкоупругих свойств;  $I_2 = 4tr(D^2) = tr(B_1^2)$  – второй инвариант тензора скоростей деформаций; индекс « $T$ » – символ транспонирования; « $tr$ » – операции взятия следа тензора.

Значения материальных функций  $\varphi_1(I_2), \varphi_2(I_2)$  могут характеризоваться достаточно сложными зависимостями от  $I_2$ . Этому вопросу посвящено большое количество специальной литературы [1,2,3]. Одной из форм таких зависимостей для вязкости  $\varphi_1(I_2)$  является модель Кутателадзе—Хабахпашевой [4]:

$$\varphi_* = \exp(-\tau_*), \quad (2)$$

где

$$\varphi_* = \frac{(\varphi_\infty - \varphi)}{(\varphi_\infty - \varphi_0)}, \quad \tau_* = \theta \frac{(\tau - \tau_1)}{(\varphi_\infty - \varphi_0)}. \quad (3)$$

Здесь  $\tau = \varphi_1(I_2) \frac{\sqrt{I_2}}{2}$ ;  $\varphi = \frac{1}{\varphi_1(I_2)}$  – текучесть;  $\varphi_0, \varphi_\infty$  – текучести при  $\tau \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow \infty$ ;

$\theta, \tau_1$  – мера и предел структурной стабильности жидкости.

Наиболее простой и в то же время точной является степенная форма представления зависимости  $\varphi_2(I_2)$ :

$$\varphi_2(I_2) = kI_2^n, \quad (4)$$

где  $k, n$  – реологические константы.

Для представления температурных зависимостей  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  будем использовать следующие экспоненциальные зависимости основных реологических параметров  $\varphi_\infty, \varphi_0, \theta, k, n$  от температуры  $T$ :

$$\begin{cases} \varphi_\infty = A_\infty \exp\left(-\frac{B_\infty}{RT}\right), \\ \varphi_0 = A_0 \exp\left(-\frac{B_0}{RT}\right), \\ \theta = \theta_0 \exp\left(-\frac{B_\theta}{RT}\right), \\ k = k_0 \exp\left(-\frac{C}{RT}\right), \end{cases} \quad (5)$$

где  $A_\infty, A_0, \theta_0, k_0$  – предэкспоненты;  $B_\infty, B_0$  – энергии активации вязкого течения при  $\tau \rightarrow \infty$  и  $\tau \rightarrow 0$ ;  $C$  – константа аналогичная величинам  $B_\infty, B_0$ ;  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Таким образом, система уравнений, описывающая изучаемый процесс теплообмена, в общей тензорной формулировке с учетом принятых допущениях имеет вид:

$$\left(\vec{v} \cdot \text{grad} T\right) = a \Delta T + \frac{\Phi}{\rho c_p}; \quad (6)$$

$$\rho(\text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v}) = -\text{grad} P + \text{div} T^0; \quad (7)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0, \quad (8)$$

где  $T^0$  – девиатор тензора напряжений;  $\Phi = \varphi_1(I_2)I_2$  – диссипативная функция;  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$

– температуропроводность;  $\rho, c_p, \lambda$  – плотность, удельная теплоёмкость и теплопроводность жидкости.

Для отыскания конкретных частных решений этой системы, т.е. неизвестных функций  $\vec{v}$  и  $T$ , в геометрической области  $\Omega$  канала следует определить краевые условия, заданные на границе  $\partial\Omega$  рассматриваемой области течения жидкости  $\Omega$ .

Гидродинамические граничные условия имеют вид:  
на границе области условия “прилипания” жидкости

$$\vec{v} \Big|_{\partial\Omega} = \vec{0}, \quad (9)$$

условие, определяющее расход жидкости через поперечное сечение области  $\Omega$

$$Q = \int_{-h_1}^{h_1} v_z(y, l_k) dy. \quad (10)$$

где  $Q$  – расход рабочей среды на единицу длины в направлении оси  $x$ .

Температурные граничные условия:

- одно из следующих граничных условий для температуры  $T$

$$c_1 \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} + c_2 T \Big|_{\partial\Omega} = c_3, \quad (11)$$

где коэффициенты  $c_1, c_2, c_3$  принимают значения:

а)  $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = T_c = \text{const}$  – для тепловых граничных условий I рода, где  $T_c$  – значение температуры в произвольной точке на границе канала;

б)  $c_1 = -1, c_2 = 0, c_3 = q = \text{const}$  – для тепловых граничных условий II рода, где  $q$  – тепловой поток в произвольной точке на границе канала;

в)  $c_1 = -1, c_2 = \alpha, c_3 = \alpha T_{oc} = \text{const}$  – для тепловых граничных условий III рода, где  $T_{oc} = \text{const}$  – температура окружающей среды;  $\alpha = \text{const}$  – коэффициент теплоотдачи на границе  $\partial\Omega$ ;

- условие, определяющее распределение температуры на входе в канал

$$T \Big|_{z=0} = T_0, \quad (12)$$

где  $T_0$  – температура рабочей жидкости на входе в канал.

**Метод решения задачи.** Решение поставленной задачи для произвольных зависимостей  $\varphi_i(I_2, T)$  невозможно получить в явном виде из-за сложностей, связанных с нелинейным характером операторов, соответствующих старшим производным уравнений системы, нелинейности конвективных членов уравнений переноса. Поэтому поиск решения такой системы проводился с помощью численных методов, при этом алгоритм был построен на базе итерационных методов [5].

Записывая систему уравнений движения, неразрывности и переноса энергии в безразмерном виде с использованием метода Галеркина, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций в узлах. Для её решения используются стандартные методы, так, например, можно использовать метод линеаризации систем нелинейных уравнений, использующий метод простой итерации, для сходимости которого необходимо подбирать как можно лучшее начальное приближение. Так при нарушении сходимости итераций с нулевым начальным приближением для системы уравнений Навье-Стокса следует в качестве начального приближения использовать решение, полученное на более грубом разбиении области, или решение, полученное при меньших числах  $Re$ .

В качестве начального приближения для определения длины теплового начального участка в конвергентно-дивергентных каналах типа использовалось значение длины теплового начального участка в плоском канале с высотой  $2h$ , соответствующей наиболее широкой части канала. Решение такой задачи проводилось на базе «параболизованной» системы уравнений переноса количества движения, неразрывности и переноса энергии. Очевидно, что полученное таким образом начальное приближение длины начального теплового участка имеет завышенное значение, которое впоследствии уточняется с помощью вычислительных процедур. При этом в качестве критерия определения длины начального теплового участка использовалась условие малости максимальной относительной разности основных искомых переменных задачи  $T, v_x, v_y$  от решения той же задачи в предположении сформировавшихся профилей температур и гидродинамических характеристик,  $T, v_x, v_y$ , начиная с некоторого значения независимой переменной  $x = x_0$ , которое и является длиной начального теплового участка. Такие решения можно получить из основной системы уравнений при условии их периодичности, используя для этого также метод Галёркина, который в итоге сводится к циклической прогонке.

Для определения неизвестных полей  $T, v_x, v_y$  использовалась модификация метода Зейделя, выраженная в поочерёдном решении уравнения переноса энергии при известном распределении гидродинамических полей, и уравнений гидродинамики при известном поле температур  $T$ . Как уже говорилось, процедура решения поставленной задачи с соответствующими условиями однозначности носит итерационный характер. На нулевом шаге итерационного процесса для вычисления гидродинамических полей полученных в предположении постоянства температуры фиксированных значениях материальных функций  $\varphi_i(I_2, T)$ . Далее производится вычисление поля температур  $T$  при рассчитанных таким образом полях  $v_x, v_y$ . Затем, на каждом шаге итерационного процесса определяются матрицы материальных функций  $\varphi_i(I_2, T)$  с использованием реологической модели и температурных зависимостей их параметров. После чего вычисляется распределение  $v_x, v_y$  при новом значении поля  $T$  с предыдущего шага итераций. Далее уточняются значения  $v_x, v_y$  использованием только что полученных матриц  $T$ . И вновь рассчитываются поля температур с использованием полученных

распределений гидродинамических характеристик. Такой итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута нужная степень точности полученных результатов.

В качестве апробации предложенной математической модели сравнивалось решение задачи теплообмена в плоском канале, полученное в предположении, что профиль скорости не меняется по длине канала и имеет параболический характер, что физически соответствует предположению о постоянстве коэффициента динамической вязкости с известным аналитическим решением Нуссельта-Гретца для такой задачи. Относительная погрешность сравнения решений этих задач не превосходила 1%.

Описанная процедура вычислений носит принципиальный характер, и предполагает достаточно быстрое получение решений поставленной задачи при небольших числах  $Pe$ , при этом длина начального теплового участка является сравнительно небольшой величиной (до 50 диаметров канала). Однако, на практике достаточно широко распространены случаи, когда числа  $Pe$  ( $Pr \gg 1$ ) достигают достаточно больших значений, что приводит к увеличению размеров области, в которой ищется решение до 1000 диаметров и более. Получение решений для таких областей приводит к некоторым вычислительным трудностям. В этом случае, целесообразным является использование следующего алгоритма расчётов. Область определения основных переменных задачи, размеры которой предварительно определяются из решения задачи теплообмена в плоском канале, делится на две части: первая часть представляет собой действительную часть конвергентно-дивергентного канала; вторая добавочная часть является частью плоского канала, используемая лишь для получения решения. В первой части размеры конечных элементов выбираются обычным способом, т.е. размеры конечных элементов много мельче, чем во второй части. Во второй части размеры конечных элементов в направлении оси канала малы, только в непосредственной близости к границе, разделяющей области, и увеличиваются на несколько порядков в остальной части области в зависимости от числа  $Pe$  или длины начального теплового участка. Далее результаты полученного решения на границе первой области являются входными для решения задачи во второй области. Такой процесс расчётов повторяется до тех пор, пока не будет получено решение задачи на необходимой длине канала.

**Результаты численных расчётов.** В результате численных исследований были получены распределения температурных и гидродинамических характеристик ламинарного потока вязкоупругой модельной жидкости при её течении в конвергентно-дивергентных каналах теплообменного оборудования. Исследовалось влияние на гидродинамическую структуру течения и теплообмен соотношений размеров конвергентной и дивергентной частей канала, при различных теплогидравлических режимах работы теплообменного оборудования.

На рис.2а представлены линии тока при небольших числах  $Re$ , характер которых говорит о медленном ламинарном движении жидкости в канале. С увеличением числа  $Re$  происходит переход от чисто ламинарного режима движения жидкости к ламинарному с макровихрями (рис.4а), которые образуются в области, непосредственно примыкающей к месту перехода от дивергентной части канала к конвергентной его части. На рис.2б наглядно представлено с помощью стрелок векторное поле скоростей, при этом длина стрелок пропорциональна величине модуля вектора скорости в соответствующих точках.

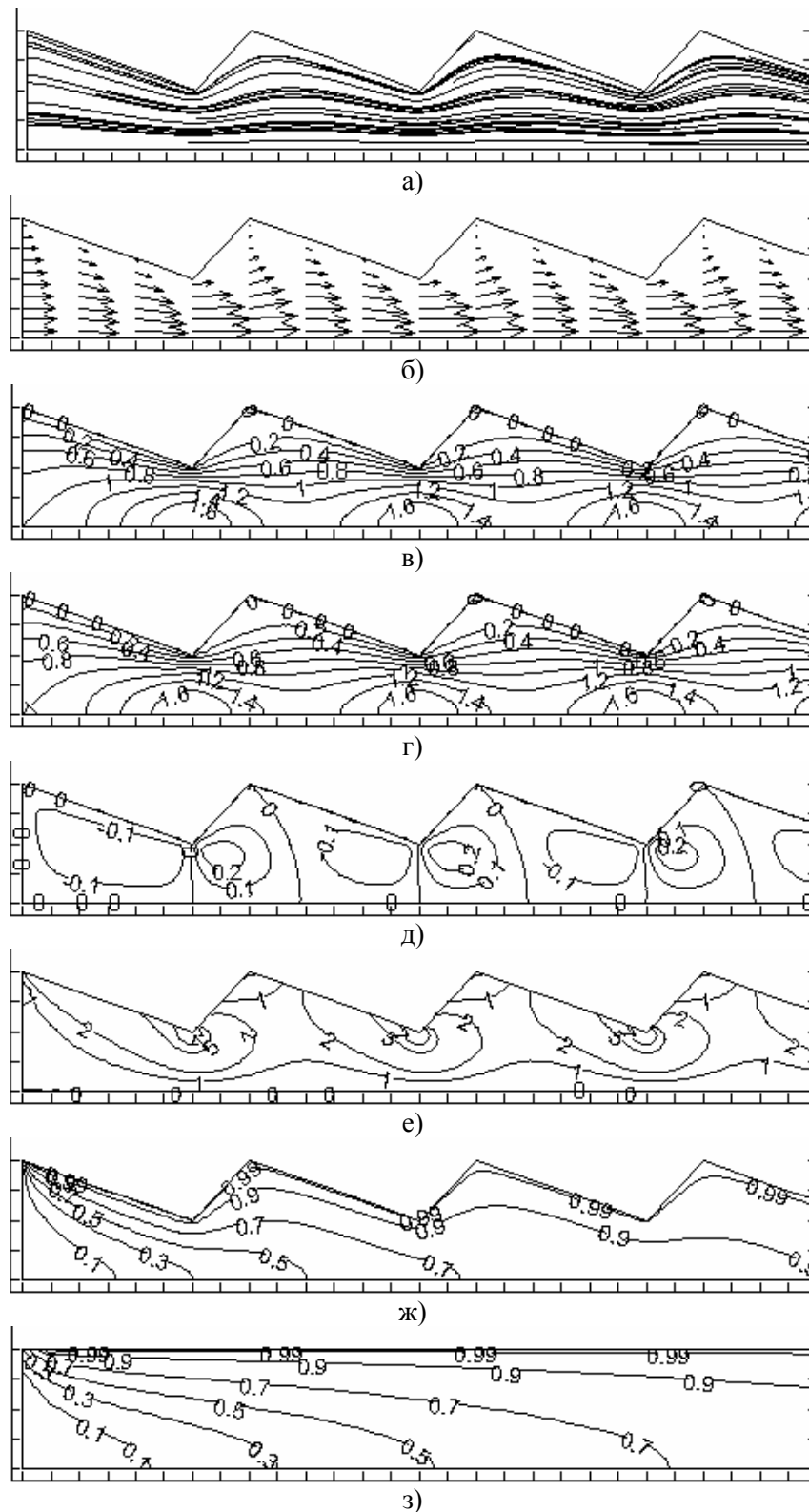


Рис. 2. Результаты численных расчётов теплообмена при течении вязко-упругой жидкости (меньшие значения  $Re$ ) в конвергентно-дивергентных каналах при  $S = 2h; l_k = 1,5h; l_d = 0,5h; h_1 = 0,5h$ . а – линии тока; б – поле вектора скорости; в – изолинии модуля вектора скорости; г – изолинии горизонтальной компоненты вектора скорости; д – изолинии вертикальной компоненты вектора скорости; е – изолинии вихря  $\omega = \omega_z = (\text{rot} \vec{v})_z$ ; ж – изотермы; з – изотермы в плоском канале высотой  $2h$

На рис.2в и 2г представлено распределение линий равных значений модуля вектора скорости и горизонтальной его составляющей. Очевидно, что чем меньше величина разницы  $h$  и  $h_1$ , тем меньше различий в распределении этих линий, и тем меньше максимальные значения вертикальной составляющей вектора скорости, что ясно видно из сравнения рис.2 в, г, д и рис. 3 б, в, г. Распределение линий равных значений единственной компоненты вектора вихря (рис.2.е) характеризуется тем, что наибольшие её значения располагаются в области канала, соответствующей переходу от конвергентной части к дивергентной его части и от дивергентной к конвергентной части.

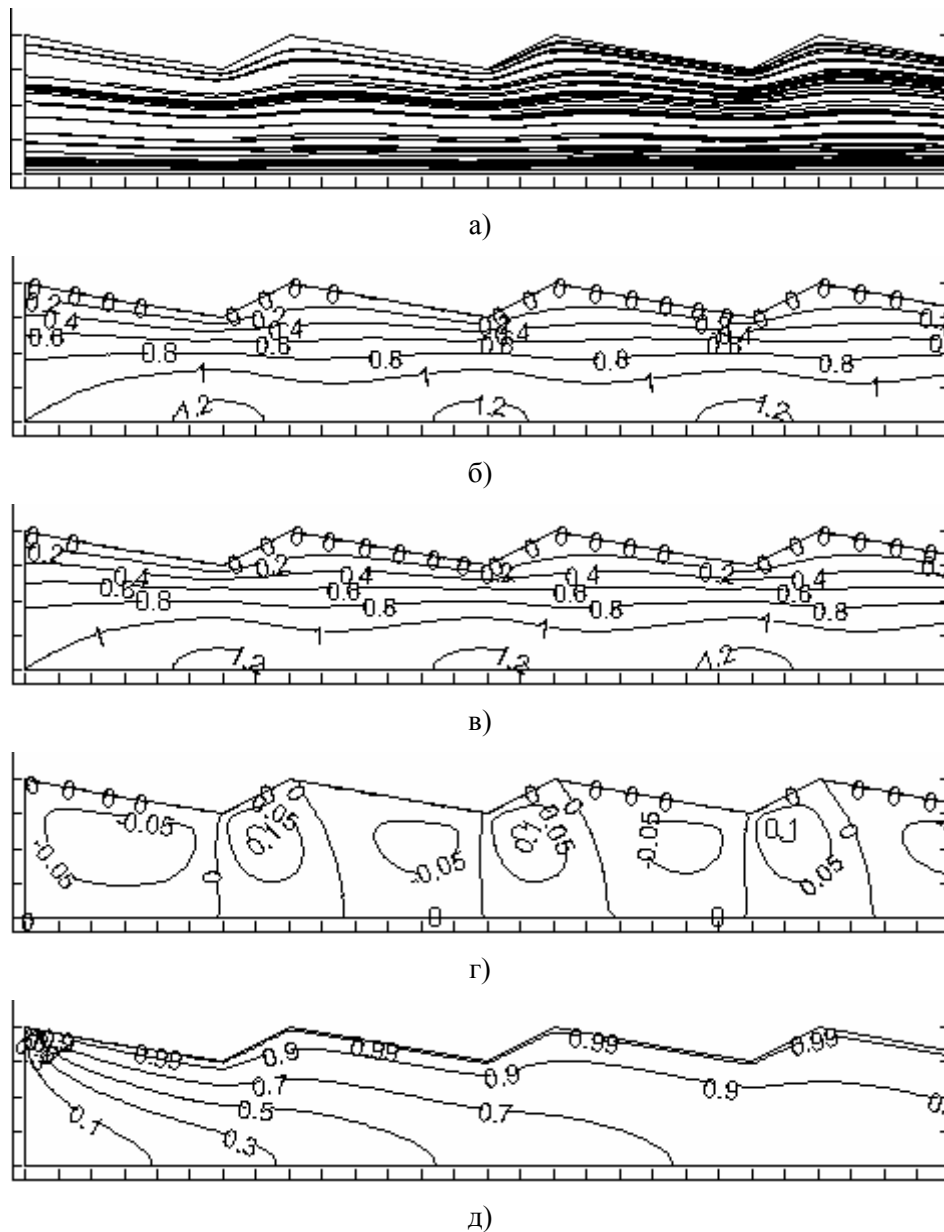


Рис. 3. Результаты численных расчётов теплообмена при течении вязко-упругой жидкости (меньшие значения  $Re$ ) в конвергентно-дивергентных каналах при  $S = 2h; l_k = 1,5h; l_d = 0,5h; h_1 = 0,75h$ . а – линии тока; б – изолинии модуля вектора скорости; в – изолинии горизонтальной компоненты вектора скорости; г – изолинии вертикальной компоненты вектора скорости; д – изотермы

Наличие конвергентно-дивергентных частей канала позволяет значительно интенсифицировать процессы теплообмена, что подтверждается распределением линий равных значений температуры в конвергентно-дивергентном канале (рис.2.ж) и в соответствующем плоском канале (рис.2.з).

К причинам интенсификации конвективного теплообмена в рассматриваемых случаях можно отнести, во-первых, увеличение поверхности теплообмена; во-вторых, разрушение пристеночных слоёв жидкости, обусловленное наличием макровихрей и, в-третьих, изменение конфигурации профиля составляющих вектора скорости в соответствии с наличием нелинейно-вязких и вязко-упругих эффектов реологических особенностей поведения исследуемых жидкостей.

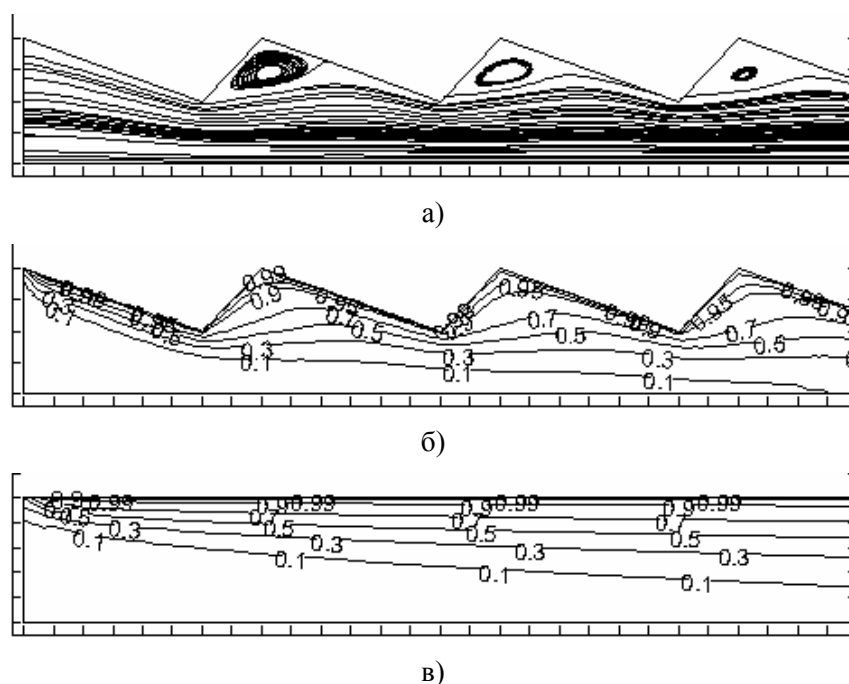


Рис. 4. Результаты численных расчётов теплообмена при течении вязко-упругой жидкости (большие значения  $Re$ ) в конвергентно-дивергентных каналах при  $S = 2h; l_k = 1,5h; l_d = 0,5h; h_1 = 0,5h$ . а – линии тока; б – изотермы; в – изотермы в плоском канале высотой  $2h$

На рис. 3 представлены линии тока и распределение линий равных значений модуля вектора скорости, его компонент и температуры при меньшем соотношении  $h_1/h$ , чем на рис.2 при других геометрических и режимных параметрах. Из сравнения этих рисунков следует, что чем меньше отношение  $h_1/h$ , тем меньше эффект интенсификации. С увеличением чисел  $Re$  происходит рост размеров области расположения макровихрей, что также приводит к увеличению интенсификации теплообмена (см. рис.4). На рис. 5 представлены линии тока и распределение линий равных значений модуля вектора скорости, его компонент и температуры при другом соотношении размеров конвергентных и дивергентных частей канала, чем на рис.4 при других равных геометрических и режимных параметрах. Как это видно из рисунка, это соотношения при данном теплогидродинамическом режиме не существенно влияет на теплообменные процессы. На рис. 6. представлены результаты численных расчётов для



случая равных соотношений дивергентной и конвергентной частей канала при  $S = 0,5h$ .

Как и следовало ожидать, уменьшение величины  $S$  приводит к большей интенсификации процессов теплообмена. Для данного режима течения характерно смена гидродинамической структуры потока, выражаемая в разделении области течения жидкости на две части. Структура течения в первой части, примыкающей к середине канала приближается к структуре течения в плоском канале с высотой  $2h_1$ ; а течение в приграничной области носит характер периодически расположенных макровихрей.

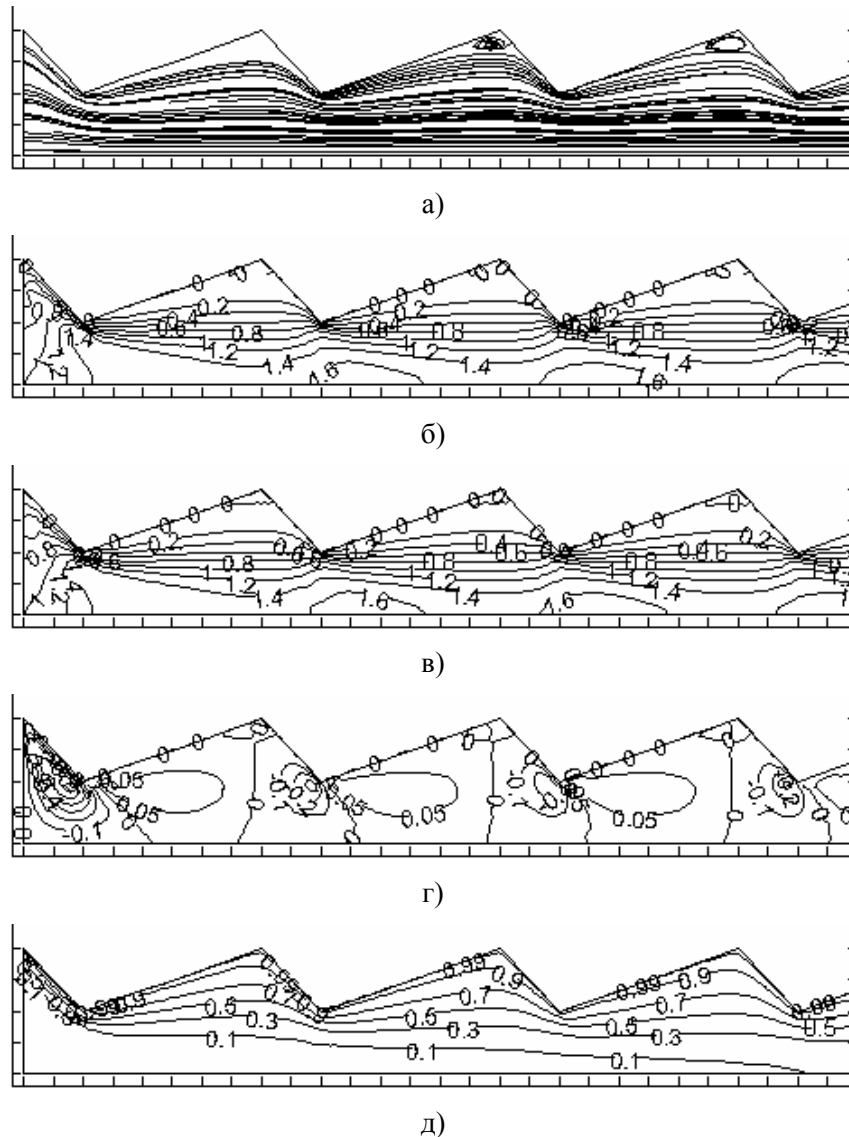


Рис. 5. Результаты численных расчётов теплообмена при течении вязко-упругой жидкости (большие значения  $Re$ ) в конвергентно-дивергентных каналах при  $S = 2h; l_k = 0,5h; l_d = 1,5h; h_1 = 0,5h$ . а – линии тока; б – изолинии модуля вектора скорости; в – изолинии горизонтальной компоненты вектора скорости; г – изолинии вертикальной компоненты вектора скорости; д – изотермы

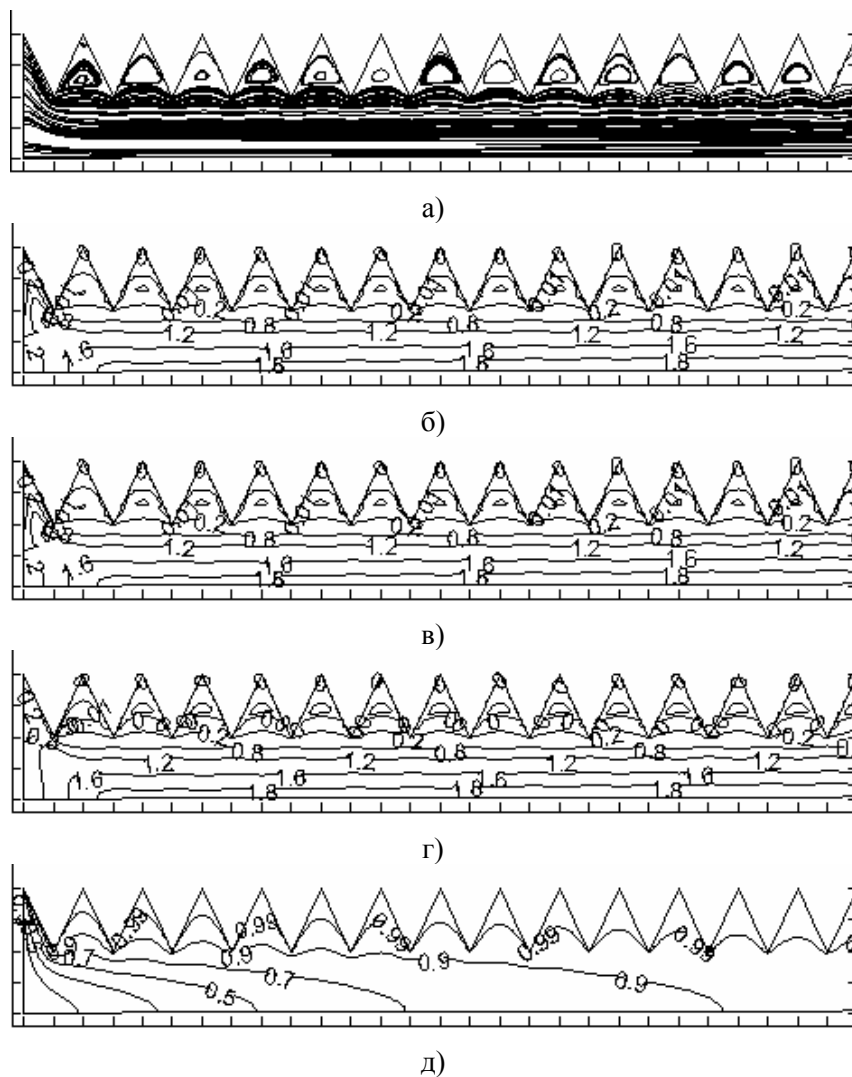


Рис. 6. Результаты численных расчётов теплообмена при течении вязко-упругой жидкости (меньшие значения  $Re$ ) в конвергентно-дивергентных каналах при  $S = 0,5h; l_k = 0,25h; l_d = 0,25h; h_1 = 0,5h$ . Обозначения как на рис. 5.

**Заключение.** Представленная математическая модель и метод решения позволили провести комплекс численных исследований процессов теплопереноса и гидродинамики при ламинарных течениях вязкоупругих сред дифференциального типа в конвергентно-дивергентных каналах теплообменного оборудования, выбрать в каждом конкретном случае на практике наиболее целесообразные с точки зрения эффективности режимы работы этого оборудования.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФАНИ (госконтракт № 02.516.11.6025, грант президента РФ №НШ-738.2008.8) и РФФИ (грант № 05-08-50043).

### Литература

- [1] Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей, Мир, Москва, 1978.
- [2] Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости, Наука, Москва, 1982.

- [3] Шульман З.П., Алейников С.М., Хусид Б.М., Якобсон Э.Э. Реологические уравнения состояния текущих полимерных сред (анализ состояния проблемы). Препринт. АН БССР, ИТМО, Минск, 1981.
- [4] Кутателадзе С. С., Попов В.И., Хабахпашева Е.М. К гидродинамике жидкостей с переменной вязкостью. ПМТФ. 1966, №1, С.45-49.
- [5] Самарский А.А. Теория разностных схем, Наука, Москва, 1983.