

СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ТЕЛ ПРИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ С УЧЁТОМ ТЕПЛОВОЙ "ПАМЯТИ"

Веселовский В.Б., Босенко Т.М.

Кафедра прикладной газовой динамики и теплообмена, Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск, Украина

В последние десятилетия с появлением новых импульсных технологий на основе использования мощных излучателей, повысилась актуальность проблемы взаимодействия интенсивных тепловых потоков с твёрдыми телами. Создаются условия скачкообразного изменения температуры поверхности твёрдого тела или граничащей с ней среды (так называемый тепловой удар). Получение сверхплотной плазмы для управляемого термоядерного синтеза, имплантация и отжиг полупроводников, модификация антикоррозийных свойств металлов и сплавов, синтез новых композиционных материалов, включая метастабильные фазы и соединения; получение тонких пленок и покрытий с заданной структурой и свойствами с помощью осаждения абляционной плазмы; очистка, полировка и глянецование поверхностей; нанофазный порошковый синтез, разрушение твердых материалов, - реализация данной технологии достигается определенным выбором интенсивности и времени облучения. На практике важной задачей является оценка долговечности и надежности элементов конструкции. В большинстве методов теории теплопроводности термомеханическая оценка прочности не проводится, а также не учитывается температурное воздействие прошедших состояний на материал (тепловая память). Качественно новый шаг в исследовании таких процессов – это использование неравновесных процессов, которые характеризуются значительным превышением запаса энергии на внутренних степенях свободы молекул по сравнению с термодинамически равновесным состоянием. Изучение таких систем может быть основано на разных версиях неравновесной термодинамики: кинетических, молекулярно-динамических, феноменологических и других методах. Экспериментально эффекты локальной неравновесности чаще всего наблюдаются при низких температурах, при облучении вещества сверхкороткими импульсами энергии, в ударных волнах и дисперсных системах, поскольку именно в этих случаях время релаксации системы до локального равновесия сравнимо с характерными временами самого процесса [1,2].

Появилась существенная потребность в использовании тонкостенных конструкций, которые включают многослойность построения, которые состоят из одного или нескольких слоёв, выполнены из различных материалов и обладают различными как механическими, так и теплофизическими характеристиками. Использование многослойных конструкций в целях обеспечения прочности, тепло- и звукоизоляции существенно позволяет снизить материалоемкость и увеличить прочность изделия.

Таким образом, одним из основных направлений в изучении высокоинтенсивных процессов, является развитие теоретической обоснованности явлений, которые наблюдаются при скоростной обработке многослойных материалов. Это позволяет уменьшить расходы при проведении опытов и оптимизировать расчёт температурных полей в многослойной структуре, вследствие чего появляется возможность проведения исследований и определения глубины проникновения разрушающего теплового потока, а также действия внешних источников высокой интенсивности.

В данной работе предложены интегральные соотношения для решения тепловых задач при экстремальных воздействиях с учётом тепловой "памяти" материала; установлена закономерность решения уравнений в поле изображений по Лапласу. Проведены асимптотические исследования данных решений и предложен метод обращения от изображений к оригиналу, представляя решения задач в виде суперпозиции параболической, гиперболической и интегральной частей. Уравнения интегро-дифференциального типа, описывающие процессы в средах с тепловой "памятью", предполагают учёт предысторий теплового воздействия на материал - теплового потока $q_s(X, Fo)$, внутренней энергии $U(X, Fo)$, которые находятся в функциональной зависимости от времени релаксации внутренней энергии (τ_e) и времени релаксации теплового потока (τ_r) [3].

Особое место среди приближенных аналитических методов занимают методы, в которых используется идея конечной скорости распространения теплового возмущения. Рассмотрена серия задач теории теплопроводности для обобщенного уравнения нестационарного теплопереноса для многослойных конструкций при экстремальных воздействиях на материал:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + Fo_v^r \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} = \beta_v \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + W, \quad (1)$$

$$\tau_{0v} \frac{\partial T_v}{\partial Fo} + Fo_v^r \frac{\partial^2 T_v}{\partial Fo^2} + \tau_{0v} \int_0^{\infty} \beta_v'(s) \frac{\partial T_v}{\partial Fo} ds = \beta_v \frac{\partial^2 T_v}{\partial x^2} + \beta_v \int_0^{\infty} \alpha_v'(s) \frac{\partial^2 T_v}{\partial x^2} ds + W. \quad (2)$$

Уравнение переноса (1) -(2) в неравновесных средах могут быть использованы для анализа сложных многокомпонентных систем, которые состоят из двух или несколько взаимодействующих подсистем с различными свойствами. В этом случае математическая модель состоит из соответствующего количества уравнений переноса, записанных для каждой отдельно взятой подсистемы с учётом обмена между ними энергией и массой. Тип уравнений переноса определяется соотношением между характерным временами процесса и временами релаксации по отношению к локальному равновесию в подсистемах. Как частный случай многокомпонентной среды была рассмотрена двухкомпонентная среда. Уравнение, учитывающее релаксационные процессы в твёрдых материалах при экстремальных воздействиях, представляет собой уравнение теплопроводности интегро-гиперболического типа с учётом тепловой памяти.

Математическая модель задач нестационарной теплопроводности для составной системы с идеальным и неидеальным тепловым контактом с учётом тепловой "памяти" на стыках для одномерного случая представляется в виде [4]:

$$\begin{aligned} & \tau_{0v} \frac{\partial \Theta_v(X, Fo)}{\partial Fo} + \tau_{0v} \int_0^{\infty} \beta_v'(s) \frac{\partial \Theta_v(X, Fo-s)}{\partial Fo} ds + Fo_v^r \frac{\partial^2 \Theta_v(X, Fo)}{\partial Fo^2} = \\ & = \beta_v^* \frac{\partial^2 \Theta_v(X, Fo)}{\partial X^2} + \int_0^{\infty} \alpha_v'(s) \frac{\partial^2 \Theta_v(X, Fo-s)}{\partial X^2} ds + W_v(X, Fo) \left(1 + Fo_v^r \frac{\partial}{\partial Fo} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha_v(Fo)$, $\beta_v(Fo)$ – функции релаксации теплового потока и внутренней энергии. Как показывают результаты экспериментальных исследований, в качестве функций релаксации могут быть приняты зависимости вида:

$$\alpha_v(Fo) = \frac{\lambda_v}{Fo_v^r} \exp\left(-\frac{Fo}{Fo_v^r}\right), \quad (4)$$

$$\beta_v(Fo) = \frac{c_v \rho_v}{Fo_v^e} \exp\left(-\frac{Fo}{Fo_v^e}\right), \quad (5)$$

где Fo_v^r , Fo_v^e – время релаксации теплового потока и внутренней энергии для ν -го слоя, X_v – локальная координата ($0_v \leq X_v \leq R_v$); Fo – время ($0 \leq Fo \leq \infty$); $\Theta_v(X_v, Fo)$ –

температура, c_ν, ρ_ν – удельная теплоемкость и плотность материала ν -го слоя;
 $W_\nu(X, Fo)$ – мощность внутренних источников (стоков) тепла.

Система интегро-дифференциальных уравнений (3) позволяет моделировать нестационарный теплообмен в системе составных тел с тепловой памятью. При

$$\alpha_\nu(0) = \frac{\lambda_\nu}{\tau_{\nu,r}}; \alpha_\nu(Fo) = 0; \beta_\nu(0) = \frac{c_\nu \rho_\nu}{\tau_{\nu,e}}; Fo_\nu^r = Fo_\nu^e; \beta_\nu(Fo) = 0 \quad (6)$$

система уравнений (3) переходит в систему гиперболических уравнений и позволяет моделировать нестационарный теплообмен в составных телах при экстремальных импульсных тепловых воздействиях.

При $Fo_\nu^r = 0$ система гиперболических уравнений переходит в систему параболических уравнений, описывающую нестационарный теплообмен в составных телах при воздействии полей различной физической природы.

Учитывая обобщённую форму решения линейных задач теории теплопроводности, решение задачи (3) с начальными, граничными и условиями на стыке представимо в виде [5]:

$$\Theta_\nu(X, Fo) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} [\mu_{n,r}^\nu(X), \varphi_n] g_r^{(n)}(Fo) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_r(p_k)}{\Psi'(\varphi_n, p_k)} Q[\mu_{n,r}^\nu(X), p_k] \exp(-\gamma_k^2 Fo) \end{array} \right\} + z_\nu(X, Fo), \quad (7)$$

$$\text{где } z_\nu(X, Fo) = z_\nu^{nam} + z_\nu^{nap} + z_\nu^{zun} \quad (8)$$

- частное решение интегро-гиперболического уравнения (3):

$$z_\nu^{nam} = z_\nu^{nap} + z_\nu^{zun} + \beta_\nu^* Fo_\nu^e \sum_{n=2}^{\infty} \beta_\nu^n \frac{n}{(n-2)!} \int_0^{Fo} (Fo - \theta)^{n-2} \frac{\partial^{2n}}{\partial X^{2n}} W_\nu(X, Fo) d\theta, \quad (9)$$

$$z_\nu^{zun} = Fo_\nu^r \beta_\nu^n \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(n+1)Fo^{n-2}}{(n-2)!} \varphi_\nu^{(2n)}(X) + \beta_\nu^* \frac{n}{(n-2)!} \int_0^{Fo} (Fo - \theta)^{n-2} \frac{\partial^{2n}}{\partial X^{2n}} W_\nu(X, Fo) d\theta \right), \quad (10)$$

$$z_\nu^{nap} = -\beta_\nu^n \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{Fo^n}{(2n)!} \varphi_\nu^{(2n)}(X) + \beta_\nu^* \frac{1}{(2n)!} \int_0^{Fo} (Fo - \theta)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial X^{2n}} W_\nu(X, Fo) d\theta \right). \quad (11)$$

Для расчёта температурного поля ν – слойного тела необходимо, используя рекуррентные соотношения, вычислить функциональные комплексы $\mu_{n,r}^\nu(X, Fo)$, φ_n , p_k :

$$\mu_{n,r}^\nu(X, Fo) = [\mu_{n,r}^\nu(X)]_{nap\bar{\theta}} + [\mu_{n,r}^\nu(X, Fo_\nu)]_{zun\bar{\theta}} + [\mu_{n,r}^\nu(X, Fo_\nu)]_{int.-\partial u\bar{\theta}}, \quad (12)$$

$$\varphi_n = [\varphi_n]_{\text{параб}} + [\varphi_n(Fo_v)]_{\text{гиперб}} + [\varphi_n(Fo_v)]_{\text{инт.-диф}}. \quad (13)$$

На основании полученных результатов, проведены исследования асимптотических свойств решений (7)-(11). Показано, что для последовательностей $[\mu_{n,r}^v]_{\text{гиперб}}$, $[\varphi_n]_{\text{гиперб}}$, $[\mu_{n,r}^v]_{\text{инт.-диф}}$, $[\varphi_n]_{\text{инт.-диф}}$ достаточно ограничиться двумя членами разложения, содержащими время релаксации теплового потока и внутренней энергии, в отличие от последовательностей $[\mu_{n,r}^v]_{\text{параб}}$, $[\varphi_n]_{\text{параб}}$ - количество членов разложения которых определяется порядком производных от компонент воздействий в решении (7).

Рассмотрен пример нагрева пластины с внутренним источником, обладающим релаксационными свойствами во время пульсационного режима. Для данного режима используется уравнение теплопроводности гиперболического типа:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + Fo^r \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + W \left(1 + Fo^r \frac{\partial}{\partial Fo} \right). \quad (14)$$

Краевые условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_2|_{Fo=0} = \Theta_1(X, \Delta Fo), \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial Fo}|_{Fo=0} = \frac{\partial \Theta_1(X, \Delta Fo)}{\partial Fo}, \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Theta_2}{\partial X}|_{X=0} = 0, \\ \Theta_2|_{X=1} = \Theta_1(\Delta X, \Delta Fo). \end{array} \right. \quad (16)$$

При решении задачи (14)-(16) операционным методом, исходная система в поле изображений принимает вид:

$$(Fo^r \cdot p^2 + p) \cdot \Theta_2 - \Theta_1(X, \Delta Fo) - \frac{\partial \Theta_1(X, \Delta Fo)}{\partial Fo} = \frac{d^2 \Theta_2}{dX^2} + W^*(X, Fo). \quad (17)$$

$$\Theta_2(X, p) = A_2 ch \sqrt{\eta_2} X + B_2 sh \sqrt{\eta_2} X + R_{\Theta_1} + R_{\Theta_2}. \quad (18)$$

$$R_{\Theta_1}(X, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(p + Fo^r p^2)^{n+1}} \frac{d^{2n}}{dX^{2n}} R_{\Theta_1} \right] \quad (19)$$

– внутренний источник предыдущего импульса,

$$R_{\Theta_2}(X, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(p + Fo^r p^2)^{n+1}} \frac{d^{2n}}{dX^{2n}} R_{\Theta_2} \right] \quad (20)$$

– внутренний источник последующего импульса.

Процессы, распространяющиеся в виде бегущих волн изучаются с помощью автомодельной переменной $X \rightarrow X - V$, где V - скорость распространения бегущей волны. Тогда источник тепла в материале принимает вид:

$$W = Fo \cdot V \frac{dW}{dX}. \quad (21)$$

При условии, что $W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(p + Fo^r p^2)^{n+1}} \frac{d^{2n+1}}{dX^{2n+1}} W(X, p)$, для i -го импульса

$W_i \approx \delta(X, \Delta e)$, где $\delta(X, \Delta e)$ - дельта-функция Дирака, Δe - приращение внутренней энергии за промежуток времени воздействия импульса, тогда:

$$\Theta_2(X, p) = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Theta_1^k(0 \Delta Fo)}{k!} X^k \right\}}{ch \sqrt{\eta_2}} ch \sqrt{\eta_2} X + \delta_{2\Theta}(X, p) + \delta_{2W}(X, p). \quad (22)$$

Проведены приближённые расчёты по определению общего состояния системы при малых временах ($Fo^* \ll Fo$), малых геометрических параметрах ($l \ll L$), где L - толщина образца, Fo^* время порядка времён релаксации процесса нагрева (охлаждения):

$$p \rightarrow 0: \delta_{2\Theta}(X, p) \rightarrow \delta_{2\Theta}(p), \quad X \rightarrow 0: \delta_{2W}(X, p) \rightarrow \delta_{2W}(p).$$

Предел величин при пульсационном режиме приводит к образованию релаксационных функций теплового потока и внутренней энергии:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{k\Theta}(p) \rightarrow \alpha(p), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{kW}(p) \rightarrow \beta(p). \quad (23)$$

Принимая во внимание (20)-(21) для достаточно больших k при пульсационном режиме, гиперболическое уравнение принимает вид интегро-дифференциального:

$$\begin{aligned} Fo_{k+1}^r \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}(X, Fo)}{\partial Fo^2} + \tau_{0,k+1} \frac{\partial \Theta_{k+1}(X, Fo)}{\partial Fo} + Fo_{k+1}^r \int_0^{\infty} \beta'_v(s) \frac{\partial \Theta_{k+1}(X, Fo-s)}{\partial Fo} ds = \\ = \beta_{k+1}^* \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}(X, Fo)}{\partial X^2} + \int_0^{\infty} \alpha'_v(s) \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}(X, Fo-s)}{\partial X^2} ds + W_{k+1}(X, Fo) \left(1 + Fo_{k+1}^r \frac{\partial}{\partial Fo} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

где $\int_0^{\infty} \alpha(s) \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}}{\partial Fo^2} d(X, Fo - s) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \left[\delta_{k\Theta} \left(\sum_{i=0}^k \Theta_i(X, Fo) \right) \right]$ - внешняя составляющая учёта предыстории изменения температурного возмущения при пульсационном воздействии на материал;

$$\int_0^{\infty} \beta(s) \frac{\partial^2 \Theta_{k+1}}{\partial X^2} d(X, Fo - s) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{d\delta_{kW}}{dX} \left(\sum_{j=0}^k \Theta_j(X, \Delta Fo) \right) \right]$$
 - внутренняя составляющая

учёта предыстории температурного возмущения при пульсационном воздействии на материал. Тем самым вычисление последующих импульсов приводит к априорному определению количества импульсов мощности, после действия, которых, происходит нагрев образца, либо прогрев определённого количества слоёв (для многослойной конструкции).

Проведён анализ решения в моменты пикового значения релаксационной и тепловой составляющих: принимая во внимание (4)-(5), получим $\frac{\beta'}{1+\alpha'} = \eta$ - комплекс, определяющий вид уравнения теплопроводности, релаксационные возмущения в материале и степень преобладания тепловых и энергетических изменений.

Так как $\ln \eta = t \left(\frac{\tau_e - \tau_r}{\tau_e \cdot \tau_r} \right) + \ln \tau_0$, тогда:

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} (\ln \eta) = \lim_{t \rightarrow \alpha} \left[\alpha \left(\frac{\tau_e - \tau_r}{\tau_e \cdot \tau_r} \right) + const \right] = M - \text{максимальное значение тепловых возмущений.} \quad (25)$$

$$\lim_{t \rightarrow \beta} (\ln \eta) = \lim_{t \rightarrow \beta} \left[\beta \left(\frac{\tau_e - \tau_r}{\tau_e \cdot \tau_r} \right) + const \right] = m - \text{минимальное значение изменения внутренней энергии.} \quad (26)$$

Таким образом, при учёте α и β можно определить максимально возможный поток, который действует на материал, но при этом определяется минимальное значение внутренней энергии для предотвращения возникновения изменений. Можно определить минимальное значение внутренней энергии для предотвращения релаксации, однако верхнего предела нет, то есть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\ln \eta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\infty \cdot \left(\frac{\tau_e - \tau_r}{\tau_r \cdot \tau_e} \right) + const \right] = \infty. \quad (27)$$

Решение имеет физическую основу только на промежутках времени, которые отвечают соответственно временам релаксации внутренней энергии и теплового потока.

Предложен численный алгоритм решения данного класса задач, проведены асимптотические расчеты на сходимость численного аналога с аналитическим решением. Для нахождения решения полученной системы был разработан итерационный процесс, который состоит из 2 этапов:

1. Строится расчётная сетка в области определения функции, условия на стыках определяются однозначно из граничных условий:

$$\varpi_h = \left\{ x_i = ih, i = 0,1,2,\dots,N, h = \frac{1}{N} \right\}, \varpi_\tau = \left\{ t_j = j \cdot \tau, j = 0,1,2,\dots,N_0, \tau = \frac{T}{N_0} \right\}.$$

2. Непосредственное нахождение значений функции в узлах сетки. Проводится аппроксимация функций релаксации теплового потока $\alpha(t)$ и внутренней энергии $\beta(t)$ в комплексы $\sum_j A_j$ и $\sum_j B_j$ соответственно.

Преобразовывая исходное уравнение, получим численный аналог:

$$\frac{y_j^{i+1} - y_j^i}{Fo} + Fo_V \frac{y_j^{i+1} - 2y_j^i + y_j^{i-1}}{Fo^2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{y_j^{i+1} - 2y_j^i + y_j^{i-1}}{Fo^2} =$$

$$= (\Lambda_{\text{параб}} + \Lambda_{\text{гиперб}} + \Lambda_{\text{нам}}) \cdot (\sigma \cdot y_j^{i+1} + (1 - \sigma) \cdot y_j^i) + \phi_j^i,$$
(28)

где

$$\Lambda_{\text{параб}} = \beta_V, \tag{29}$$

$$\Lambda_{\text{гиперб}} = \left[a \cdot \sum_{k=1}^{\infty} B_k \right], \tag{30}$$

$$\Lambda_{\text{нам}} = \left[a \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k \right]. \tag{31}$$

Краевые условия:

$$y_i^0 = u_0(X_i) - \text{начальные условия}; \tag{32}$$

$$(y_i^1 - y_i) = u_1(Fo_i) - \text{аналог первой производной от искомой функции}; \tag{33}$$

$$y_0^j = \mu_1(Fo_j) - \text{граничные условия на поверхностном слое}; \tag{34}$$

$$(y_{N-1}^i - y_N) = \mu_2(Fo_j) - \text{условие на внутреннем слое}. \tag{35}$$

Проведён сравнительный анализ решений гиперболического (метод сеток) и интегро-дифференциальных уравнений (метод Галеркина). Математические модели,

которые описывают неравновесные процессы переноса, являются иерархической последовательностью, соответствующей степени отклонения системы от локального равновесия. Степень отклонения системы от локального равновесия и, следовательно, адекватный выбор той или другой модели переноса зависят от соотношений между характерными пространственно-временными масштабами процесса переноса (макро- и микромасштабами), которые характеризуют релаксацию системы к локальному равновесию. Следует отметить, что характерные масштабы процесса переноса зависят как от внешних факторов, таких как граничные и начальные условия, источники тепла и массы, так и от параметров самой системы, например коэффициентов теплопроводности. Характерные времена релаксации и масштабы не пространственной локальности являются внутренними параметрами самой системы и не зависят от внешних условий.

Иерархическая последовательность математических моделей состоит из последовательности уравнений в частных производных параболического и гиперболического типов, порядок которых увеличивается с увеличением степени отклонения системы от локального равновесия. Тип уравнений зависит от закона граничного перехода, который, в свою очередь, определяется характером процесса переноса.

Следует отметить, что процедура расписания за малым параметром изменения температуры (или несколькими параметрами) часто встречается в термодинамических и статистических теориях, например в методах Греда и Чепмена [3]. Следовательно, в этих случаях также может оказаться полезной идея о введении различных законов граничного перехода, которые определяют взаимное поведение параметров разложения при стремлении их к нулю. Предлагаемые неравновесные модели процессов переноса, с одной стороны, находятся в соответствии с существующими версиями неравновесной термодинамики, а с другой стороны, расширяют круг возможных объектов исследований и имеют относительно простой вид, что позволяет использовать их для анализа конкретных физических ситуаций.

Проведенные на основе этих моделей исследования показали, что неравновесные эффекты оказывают определяющее влияние на механизм и основные закономерности распространения высокоскоростных волн в активных средах. В условиях, далеких от локального равновесия, распределения потенциалов переноса существенно отличаются от классических, локально равновесных. Это и приводит к качественно новым свойствам бегущих волн в неравновесных условиях. Развитые

методы носят достаточно общий характер и могут служить основой для построения неравновесных моделей процессов переноса, которые протекают в различных физических системах.

В качестве примера рассмотрено уравнение (1) с граничными условиями первого и второго рода и нулевыми начальными условиями.

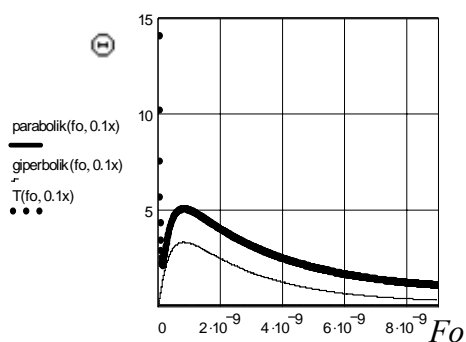


Рис. 1 Сравнительный анализ решений гиперболического, интегро-дифференциального уравнений.

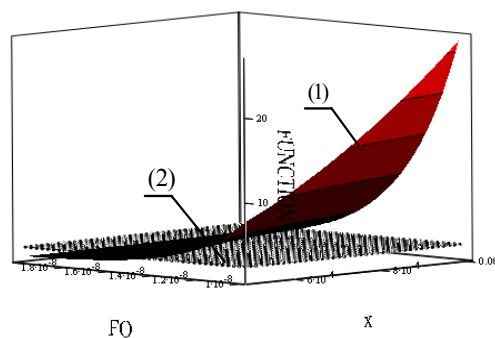


Рис. 2 Распределение температурного поля интегро-дифференциального(1) и параболического уравнений(2) при временах импульсного нагрева.

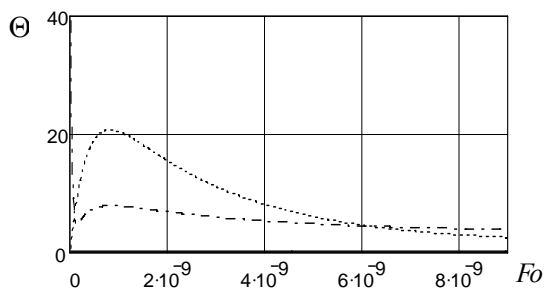


Рис. 3 Сравнительный анализ решений гиперболического, интегро-дифференциального уравнений.(пульсационный нагрев).

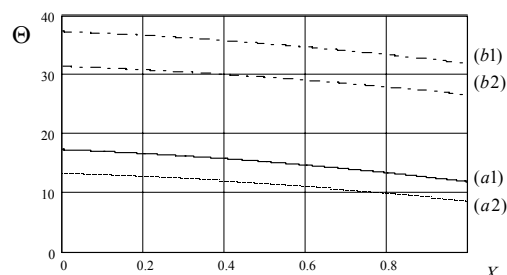


Рис. 4 Распределение температуры по толщине в момент времени $Fo = 10^{-11}$ при постоянной температуре $T = 500^{\circ}C$ (a), $T = 1500^{\circ}C$ (b)

На рис.1,2 проведена сравнительная оценка результатов с параболическим и гиперболическим типами уравнений нестационарной теплопроводности. Заметим, что при увеличении числа слоёв пластины, эффект памяти будет постепенно исчезать, с повышением номера слоя, это прежде всего связано с уменьшением релаксационных процессов в каждом последующем слое. Таким образом, из рис.3 для оксида алюминия Al_2O_3 , при принятых краевых условиях решение уравнения теплопроводности интегро-дифференциального типа имеет особенности при начальных стадиях нагрева, который

выражается в выявлении двух отклонений температуры, выраженных явным скачком, физическая интерпретация которого заключается в учёте тепловой памяти прошедших состояний нагрева (или охлаждения) материала. Рис.4 представляет собой распределение температуры по толщине пластины при временах релаксации теплового потока ($\tau_r = 10^{-9} \text{ c}$) и внутренней энергии ($\tau_e = 10^{-11} \text{ c}$) соответственно [6].

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы: решения гиперболического и интегро-дифференциального уравнения переноса теплоты практически совпадают при больших моментах времени ($Fo \ll Fo'$) с решением классического параболического уравнения теплопроводности. Значительные отличия обнаруживаются только в начальные моменты времени на протяжении $(3-10)\tau_r$, $(3-10)\tau_e$. Релаксационные функции $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ для большинства материалов при высоких температурах ($\Theta \ll T$) быстро затухают со временем. Это приводит к тому, что решение интегро-дифференциальных уравнений переноса теплоты незначительно отличается от решений уравнений параболического типа. Релаксационные функции имеют заметную протяженность только при экстремальных температурах. Выполненные расчёты являются основой для последующей качественной оценки факторов теплотехнологического процесса и позволяют учесть их при разработке более сложных моделей.

Литература

- [1] Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций – М.: Высшая школа, 2005. – 430 с.
- [2] Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 296 с.
- [3] David I.N. Wall, Peter Olsson. Invariant imbedding and hyperbolic heat waves // I. Math. Phys. – 38(3). – March. – 1997. – pp. 1723 – 1749.
- [4] Веселовский В.Б., Сова Ю.А., Босенко Т.М. Задачи теплопроводности для составных сред с тепловой памятью// Металлургическая теплотехника.- Дн.: Пороги, 2005.-С.20-31.

- [5] Босенко Т.М. Численный метод решения задачи теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учётом тепловой памяти// Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дн.: Зб. наук. пр. ДНУ. – 2007. – С.111-117.
- [6] Веселовский В.Б., Босенко Т.М., Горелова К.В. Решение задач теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учётом тепловой памяти// Вестник ХНТУ. – Херсон. – Вып.2 (28), 2007. – С. 87-92.