

СИСТЕМНЫЙ ПОИСК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОМЕРНЫХ ТЕЛАХ. ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ И МУЛЬТИСОЛИТОНОВОЕ ТЕПЛОВОЕ СОСТОЯНИЕ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЯХ

П. В. Цой¹, Ю.Т. Глазунов², Е. В. Цой¹

¹ Королевская высшая техническая школа, Стокгольм, Швеция,

² Гданьский технический университет, Гданьск, Польша (2)

Аннотация

Интегральным усреднением по времени с помощью преобразования Лапласа математическая модель нестационарной теплопроводности преобразуется в граничную задачу. Последняя решается ортогональной проекцией невязки, где в качестве конечного элемента выступает вся область изменения эллиптических координат. Многообразие определения решения в альтернативных римановых пространствах [1] приводит к выбору оптимальной координатной функции, с помощью которой температурные поля находятся в однокомпонентном представлении с повышенной точностью, что позволило решить проблему определения изотермических поверхностей и исследовать мультисолитоновый тепловой эффект.

1. Введение

При использовании проекционных методов определяющее значение имеет выбор системы координатных функций. Представляют они в общем случае [5] последовательность линейно независимых функций $\{\varphi_i(P)\}_{i=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям: **1)** Координатные функции $\varphi_i(P)$ в области D должны иметь столько производных, каков порядок уравнения; **2)** Функции $\varphi_i(P)$ ($i=1, 2, \dots$) должны удовлетворять однородным краевым условиям $R[\varphi_i(P)]=0$ ($i=1, 2, \dots$), а функция $\varphi_0(P)$ – неоднородным краевым условиям; **3)** Для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждой функции u из класса допустимых функций должно существовать такие числа a_i и такое конкретное значение $n \in \mathbb{N}$, что имеет место неравенство:

$$\left(L \left[u - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(P) \right], u - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(P) \right) - 2 \left(f, u - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(P) \right) < \varepsilon.$$

Однако практика инженерных расчётов выдвигает и другие требования.

В системном исследовании краевых задач важным является факт, как и какими средствами математики выполняется анализ входных функций нагружения, служащий в дальнейшем успешному синтезу искомого решения. В интегральных преобразованиях анализом является перевод входных функций в область изображений, а также трансформация исходного уравнения по конкретному аргументу. Синтезом можно

считать процесс определения изображения искомой функции из полученного уравнения с последующим переводом её в область оригиналов. Если для данной задачи известна система собственных функций, то введением многомерного ядра по всем эллиптическим координатам методом интегрального преобразования задачу можно свести к интегральному уравнению, а синтез искомого температурного поля реализовать функциональным рядом при произвольных входных функциях, отвечающих внутренним и внешним тепловым нагрузкам.

Явная форма собственных функций известна далеко не всегда. Однако, при разработке практических методов расчёта это обстоятельство большого значения не имеет, поскольку для таких задач решения находятся ортогональной проекцией невязки с использованием многообразия альтернативных римановых пространств. Более того, выбор оптимальных координат в зависимости от геометрии тела и вида функций, характеризующих внутренние и внешние тепловые нагрузки, позволяет находить температурные поля в однокомпонентном представлении с повышенной точностью. Для исследования краевых задач для нестационарных процессов часто применяется метод Галёркина, где, как и методе разделения переменных Фурье, решения складываются на основе координатных базисных функций, неопределённые коэффициенты которых завесят от времени. При реализации этого метода в альтернативных пространствах возникают затруднения, связанные с нахождением начальных условий, служащих однозначному определению решения. В то же время ортогональная проекция невязки после интегрального усреднения по времени нестационарного потенциала переноса преобразованием Лапласа позволяет преодолеть эту трудность [2].

2. Алгоритмы и результаты расчёта некоторых задач

Температура в длинных призматических (цилиндрических) телах с постоянным сечением Ω , симметричным плоскости Oxy в относительных координатах $\xi = \frac{x}{h}$, $-1 \leq \eta = \frac{y}{b} \leq 1$ находится из решения уравнения теплопроводности, которое после применения преобразования Лапласа, приводящего к изображению $\bar{T}(\xi, \eta, p) \doteq T(\xi, \eta, Fo)$, преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \eta^2} - [p \bar{T}(\xi, \eta, p) - T(\xi, \eta, \nabla)] - \frac{q_v h^2}{\lambda} \varphi_0(\xi, \eta) \bar{f}(p) = 0, \quad \beta = \frac{h^2}{b^2}. \quad (1)$$

Внутри тела вращения вокруг оси ξ ($\xi \rightarrow \sqrt{\eta^2 + \xi^2}$) температура определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \xi^2} + \beta \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \xi^2} \right) - [p \bar{T}(\xi, \eta, \varsigma, p) - T_0] - \frac{q_v h^2}{\lambda} \psi_0 \left(\xi, \sqrt{\eta^2 + \xi^2} \right) \bar{f}(p) = 0, \quad -1 \leq \varsigma = \frac{z}{b} \leq 1. \quad (2)$$

Температурное поле, обусловленное только внутренними тепловыми нагрузками (внешняя среда остаётся при постоянной начальной температуре тела T_0), находится с помощью ортогональной проекции невязки во множестве линейных комбинаций вида

$$\bar{T}_n(\xi, \eta, p) = \frac{T_0}{p} + \sum_{k=1}^n \bar{a}_k(p) \psi_k(\xi, \eta). \quad (3)$$

Это приводит к системе определяющих уравнений

$$(\mathbf{A} + p\mathbf{B})\bar{\mathbf{a}}(p) + \frac{q_v h^2}{\lambda} \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{f}}(p), \quad (4)$$

где элементы матриц и векторов вычисляются по формулам, представленным в [2].

Выбор наилучшей координатной функции $\psi_0(\xi, \eta)$, для которой температура находится в классе функций $O(f(\text{Fo}))=1$, реализуется на основе решения уравнения Пуассона, отвечающего стационарной задаче теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = -\frac{q_v h^2}{\lambda} \psi_0(\xi, \eta). \quad (5)$$

Для любой конкретной функции $\psi(\xi, \eta) = T(\xi, \eta)$, заданной в области Ω и удовлетворяющей нулевым граничным условиям на поверхности, вычислением выражения $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}$ находится $\psi_0(\xi, \eta)$. Функция $\psi_1(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta)$ представляет оптимальный базис для определения нестационарной температуры при внутреннем источнике $q_v(\xi, \eta, \text{Fo}) = \frac{q_v h^2}{\lambda} \psi_0 f(\text{Fo})$.

Этим методом показано, что составные граничные функции $\omega(\xi, \eta)$ [2] внутри пластины $\Omega\left(-1 \leq \xi = \frac{x}{R} \leq 1, m=0\right)$, цилиндра $\Omega\left(0 \leq \xi = \frac{r}{R} \leq 1, m=1\right)$, шара $\Omega\left(0 \leq \xi = \frac{r}{R} \leq 1, m=2\right)$, а также для цилиндра с эллиптическим сечением $\Omega\left(\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right)$, для трехосного эллипсоида $\Omega\left(\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{l^2} \leq 1\right)$ и призмы с равносторонним треугольным сечением $\Omega\left(\frac{y}{b} \leq \frac{x}{h}, y(b) \geq -\frac{x}{h}, 0 \leq x \leq h, \sqrt{\beta} = \frac{h}{b} = \sqrt{3}\right)$ служит оптимальным координатным базисом для решения нестационарных задач теплопроводности с равномерным распределением внутренних источников ($\psi_0=1$). Для параболоида вращения $\Omega\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq \frac{x}{h}, 0 \leq x \leq h, \beta = \frac{h^2}{b^2}\right)$ и призмы прямоугольного сечения $\Omega\left(-1 \leq \xi = \frac{x}{h} \leq 1, -1 \leq \eta = \frac{y}{b} \leq 1\right)$ составные граничные функции $\omega(\xi, \eta) = (\xi - \xi^2 - \eta^2)(1 - \xi)$, $\omega(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$ принимаются за оптимальный базис при распределении $\psi_0(\xi, \eta) = 1 + \beta(2 - \xi)$ и $\psi_0(\xi, \eta) = (1 + \beta) - (\eta^2 + \beta\xi^2)$.

В квадратном стержне $\Omega(-h \leq x \leq h, -h \leq y \leq h, \beta = 1)$ решение уравнения Пуассона (5) при однородных граничных условиях

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi=\pm 1} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{\eta=\pm 1} = 0$$

и $\psi_0(\xi, \eta) = 2 - 3(\xi^2 + \eta^2)$ принимает вид:

$$T(\xi, \eta) = T_0 + \frac{q_v h^2}{4\lambda} \left(\xi^4 - 2\xi^2 + \eta^4 - 2\eta^2 + \frac{14}{15} \right).$$

Следовательно, при знакопеременных внутренних тепловых нагрузках (когда внутри круговой области $\xi^2 + \eta^2 \leq \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$ тепло выделяется, а в остальной части стержня - поглощается), за основную координатную функцию следует принимать

$$\psi_1(\xi, \eta) = \frac{14}{15} - 2\xi^2 + \xi^4 - 2\eta^2 + \eta^4.$$

Тогда температурное поле при $f(\text{Fo}) = 1$ приводится к виду:

$$T(\xi, \eta, \text{Fo}) = T_0 + \frac{q_v h^2}{4\lambda} \psi_1 [1 - \exp(-10\text{Fo})]. \quad (6)$$

Внутри куба $\Omega\left(-1 \leq \xi = \frac{x}{h} \leq 1, -1 \leq \eta = \frac{y}{h} \leq 1, -1 \leq \zeta = \frac{z}{h} \leq 1\right)$, когда знакопеременное распределение представлено функцией

$$\psi_0(\xi, \eta, \zeta) = 1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2, \quad (7)$$

при внутренней нагрузке вида:

$$q_v(\xi, \eta, \zeta, \text{Fo}) = \frac{q_v h^2}{\lambda} \psi_0(\xi, \eta, \zeta) f(\text{Fo})$$

и тепловой изоляции температурное поле записывается как

$$T(\xi, \eta, \zeta, \text{Fo}) = T_0 + \frac{q_v h^2}{12\lambda} P_1^{(1)} \times \left(\frac{7}{5} - 2\xi^2 + \xi^4 - 2\eta^2 + \eta^4 - 2\zeta^2 + \zeta^4 \right) \int_0^{\text{Fo}} f(\tau) \exp(P_1^{(1)}(\text{Fo} - \tau)) d\tau, \quad (8)$$

где $P_1^{(1)} = 12D_1 / A_{11}$, $A_{11} = \iint_{\Omega} \psi_2^2 d\xi d\eta$, $D_1 = \iint_{\Omega} \psi_0 \psi_1 d\xi d\eta$.

Обратная задача, связанная с определением $\psi(\xi, \eta)$ при конкретном распределении ψ_0 , является более сложной и сводится к решению многомерного уравнения Пуассона (5). При граничных условиях первого рода наиболее эффективно и просто решение находится через составную граничную функцию профиля Ω .

При граничных условиях третьего рода наилучшая координатная функция для объединённого уравнения теплопроводности, описывающего перенос в трёх простых

телах со степенным распределением $\psi_0(\xi) = 1 - \delta\xi^n$ получена в работе [2]. При значении параметра

$$\delta^* = -(n+1)(m+4) \quad (9)$$

для произвольных $f(\text{Fo})$ температура представляется простой формулой вида:

$$\begin{aligned} T(\xi, \text{Fo}, m, n, \delta^*) &= T_0 + \frac{q_v R^2}{2\lambda(m+1)} \times \\ &\times [n - (n+2)\xi^2 + 2\xi^{n+2}] P_1^{(1)}(\delta^*) \times \\ &\times \int_0^{\text{Fo}} f(\tau) \exp[-P_1^{(1)}(\text{Fo} - \tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

которая при $n=4$, $f(\text{Fo})=1$ упрощается ещё более и записывается как

$$\begin{aligned} T(\xi, \text{Fo}, m, n, \delta^*) &= T_0 + \frac{q_v R^2}{6\lambda(m+1)} \times \\ &\times (2 - 3\xi^2 + \xi^6) [1 - \exp(-P_1^{(1)}(\delta^*)\text{Fo})]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь для $m=0$ $P_1^{(1)}(\delta^*)=2,799$, для $m=1$ $P_1^{(1)}(\delta^*)=6,364$ и для $m=2$ $P_1^{(1)}(\delta^*)=10,622$.

Из решения (10) следует, что условие (9) приводит к мультисолитоновому тепловому состоянию, которое вызывает прекращение теплообмена с внешней средой. Переход к стационарной температуре протекает при адиабатических границах области изменения переменных. Базис перестаёт зависеть как от параметра m , так и от числа Bi , и это несмотря на то, что первоначально задача была поставлена для краевых условий третьего рода. Решение (11) показывает, что внутри шара мультисолитоновый эффект протекает с выделением тепла ($\psi_0(\xi)=1-7\xi^4/3$) в центральной части тела ($0 \leq \xi \leq 0,81$) и её поглощением внутри слоя $0,81 < \xi \leq 1$. Отметим, что температурные поля (7) и (8) показывают аналогичные тепловые состояния в квадратном стержне и кубе.

В цилиндрическом стержне полукруглого сечения $\Omega(x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq y \leq R)$ при распределении внутренних источников вида

$$\begin{aligned} q_v(\xi, \eta, \text{Fo}) &= \frac{q_v R^2}{\lambda} \psi_0(\xi, \eta) f(\text{Fo}) = \\ &= \frac{q_v R^2}{\lambda} \eta f(\text{Fo}) \end{aligned}$$

температура, вычисленная с повышенной точностью при постоянных граничных условиях первого рода и постоянной функции управления ($f(\text{Fo})=1$), записывается как

$$T(\xi, \eta, \text{Fo}) = T_0 + \frac{q_v R^2}{8\lambda} (1 - \xi^2 - \eta^2) \eta \times$$

$$\times [1 - \exp(-16\text{Fo})], \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \eta = \frac{y}{R}, \quad \text{Fo} = \frac{a\tau}{R^2}. \quad (12)$$

В многомерных телах точное значение температуры в однокомпонентном представлении находится тогда, когда $\psi_0(\xi, \eta)$ задаётся одной из собственных функций исследуемой задачи. Внутри цилиндра конечной длины $\Omega\left(0 \leq \xi = \frac{r}{R} \leq 1, 0 \leq \eta = \frac{z}{h} \leq 1\right)$ решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} &= \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \beta \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \\ &+ \frac{q_v R^2}{\lambda} \psi_0(\xi, \eta) f(\text{Fo}), \quad \beta = \frac{R^2}{h^2} \end{aligned}$$

при $\psi_0 = J_0(\mu_j \xi) \sin \pi \eta$, где μ_j – фиксированный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$, определяет точное температурное распределение в форме:

$$\begin{aligned} T(\xi, \eta, \text{Fo}) &= T_0 + \frac{q_v R^2}{\lambda} J_0(\mu_j \xi) \sin \pi \eta \times \\ &\times \int_0^{\text{Fo}} f(\tau) \exp[-(\mu_j^2 + \beta \pi^2)(\text{Fo} - \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

При $f(\text{Fo}) = 1$, $\mu_j = \mu_1 = 2,404$ имеем отсюда

$$\begin{aligned} T(\xi, \eta, \text{Fo}) &= T_0 + \frac{q_v R^2}{\lambda(\mu_1^2 + \beta \pi^2)} J_0(\mu_1 \xi) \sin \pi \eta \times \\ &\times [1 - \exp(-(\mu_1^2 + \beta \pi^2)\text{Fo})]. \end{aligned} \quad (14)$$

При краевых условиях второго рода точное решение

$$\begin{aligned} T(\xi, \eta, \text{Fo}) &= T_0 + \frac{q_v R^2}{\lambda(\mu_1^2 + \beta \pi^2)} J_0(\mu_1 \xi) \cos \pi \eta \times \\ &\times [1 - \exp(-(\mu_1^2 + \beta \pi^2)\text{Fo})] \end{aligned} \quad (15)$$

описывает мультисолитоновый эффект теплового состояния, созданный знакопеременным распределением $\psi_0(\xi, \eta)$, интеграл от которого по всему объёму тела равен нулю. Здесь $\mu_1 = 3,8317$ – первый ненулевой корень уравнения $J_1(\mu) = 0$.

Если принять норму координатной функции в виде:

$$\|\psi_1\| = \max |\psi_1(\xi, \eta)|,$$

то с помощью нормированной функции

$$\theta(\xi, \eta) = \psi_1(\xi, \eta) / \|\psi_1\|$$

из всех однокомпонентных решений можно получить семейства изотермических поверхностей $\theta(\xi, \eta) = \theta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, температура на которых от времени не зависит.

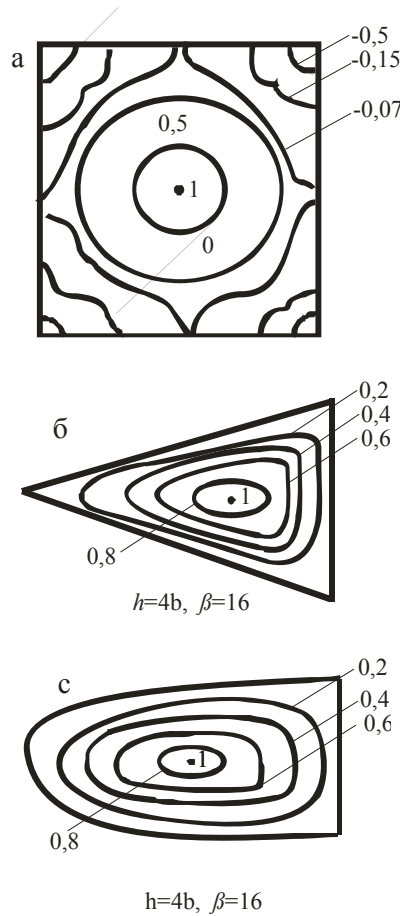


Рис. 1. Изотермические кривые нестационарных температурных профилей:
 а – в квадратном стержне при $\psi_0 = 2 - 3(\xi^2 + \eta^2)$ (солитоновый эффект);
 б – в конусе при $\psi_0 = (3\xi - 1) + 2\beta(\xi + 1)$;
 с – в параболоиде вращения $\psi_0 = 1 + 2\beta(\xi - 1)$.
 Цифры на кривых – значения температуры.

На рис. 1 представлены изотермические кривые, полученные для тел различной формы рассмотренными выше методами.

Таким образом, определение оптимальных координатных функций фактически решает и проблему нахождения изотерм нестационарной теплопроводности [1].

3. Заключение

В уравнения теплопроводности параболического и гиперболического типов входят одинаковые дифференциальные операторы по эллиптическим координатам. Их собственные функции совпадают и результаты исследования таких задач могут быть обобщены для изучения процессов в инерционно-волновых средах путём решения гиперболических уравнений в прямых и альтернативных пространствах Римана.

Обозначения

a – коэффициент температуропроводности;
 λ – коэффициент теплопроводности;
 $Fo = at / h^2$ – число Фурье;
 $O(f(Fo))$ – символ Ландау.

Литература

- [1] **Предводителев А. С.** Учения о теплоте в римановых многообразиях // Сб. Проблемы тепло- и массопереноса. М: Энергия, 1970. С. 151 - 191.
- [2] **Цой П. В.** Системные методы расчёта краевых задач тепломассопереноса. М: МЭИ, 2005, 560 с.
- [3] **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М: Высшая школа, 1967, 600 с.
- [4] **Блауместер Л., Халлил Т.** Гиперболические уравнения теплопроводности. Решение задач в полуограниченных телах // Теплопередача, 1969, № 4. С 112 - 119.
- [5] **Глазунов Ю. Т.** Вариационные методы. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005, 468 с.