*УДК 539.3*

***Шевелев В. В., Осипов Р.А.***

# НАХОЖДЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТОНКОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНОЙ

**Аннотация.** *На основе сочетания методов разделения переменных и преобразования Фурье получено аналитическое выражение для стационарного температурного поля в тонкой бесконечной пластине с внутренней прямолинейной трещиной, моделировавшейся прямолинейным разрезом нулевой толщины. Полученное решение может быть использовано для прогнозирования долговечности материалов, содержащих трещины.*

**Введение.** Одним из подходов к прогнозированию долговечности материалов в стационарных механических и температурных полях является нахождение условной стационарности термодинамического потенциала образца $\Delta\Phi$, содержащего начальные трещины характерного для материала размера. Для нахождения потенциала $\Delta\Phi$ упругого материала необходимо, в свою очередь, согласно [1], знать поле напряжений, деформаций и температуры. В приведенном перечислении полей первоочередной задачей является нахождение температурного поля, являющегося неотъемлемой составной частью термоупругого состояния материала. Наличие трещин в материале, рассматриваемых в рамках математической теории трещин, как разрезы нулевой толщины, существенно осложняет возможность получения аналитического решения соответствующей краевой задачи стационарного теплопереноса. Это связано с тем, что указанная краевая задача содержит, как правило, разнородные граничные условия [2]. Таким образом, развитие аналитических методов решения краевых задач стационарной теплопроводности в областях с разрезами нулевой толщины представляет значительный интерес как для аналитической теории теплопроводности, так и для механики хрупкого разрушения и долговечности термоупругих материалов.

**Постановка задачи.** С практической точки зрения представляет интерес исследование метода решения следующей задачи стационарной теплопроводности для тонкой бесконечной пластины, имеющей толщину $h$ и внутренний разрез длины $l$, берега которого перпендикулярны поверхностям пластины ($S_0$ — внешняя поверхность образца, $S_{\text{т}}$ — поверхность трещины, $D$ — область переноса, $M=(x,y,z)$, $T_c$ — температура среды):

$$W(x,y,z)=T(x,y,z)-T_c, \tag{1}$$

$$\Delta W(M)=0, \quad M\in D, \tag{2}$$

$$W(M)=0, \quad M\in S_0, \tag{3}$$

*Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М. В. Ломоносова, проспект Вернадского 86, Москва, Россия*

$$-\lambda \frac{\partial W\left(M\right)}{\partial n} = q, \quad M \in S_T, \tag{4}$$

$$\lim_{\rho(M)\to\infty} W\left(M\right) = 0. \tag{5}$$

Учитывая геометрию области переноса

$$D = \left\{ x, y, z \middle| \; |z| < \frac{h}{2}, \; \left(x, y\right) \in E^2 \setminus \left\{ \left(x, y\right) \middle| \; |x| < \frac{l}{2}, \; y = 0 \right\} \right\},$$

и, соответствующую симметрию задачи, решение модели переноса (1) — (4) будем искать в виде:

$$W\left(x, y, z\right) = W_1\left(x, y\right) W_2\left(z\right). \tag{6}$$

Подставив (5) в (1) и разделив затем переменные, получим следующее уравнение для функции $W_1\left(x, y\right)$:

$$\frac{\partial^2 W_1\left(x, y\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1\left(x, y\right)}{\partial y^2} = \gamma^2 W_1\left(x, y\right), \tag{7}$$

а также краевую задачу для функции $W_2\left(z\right)$:

$$\frac{d^2 W_2\left(z\right)}{dz^2} + \gamma^2 W_2\left(z\right) = 0, \; 0 < z < \frac{h}{2}, \tag{8}$$

$$\left. \left\{ \frac{dW_2\left(z\right)}{dz} \right\} \right|_{z=0} = 0, \tag{9}$$

$$\left. \left\{ W_2\left(z\right) \right\} \right|_{z=\frac{h}{2}} = 0, \tag{10}$$

которая учитывает очевидную симметрию задачи $\left(W\left(x, y, -z\right) = W\left(x, y, z\right)\right)$ и, как следствие, четность функции $W_2\left(z\right)$ $\left(W_2\left(-z\right) = W_2\left(z\right)\right)$, вследствие чего появляется условие (9).

Исходя из (8) следует, что:

$$W_2\left(z\right) = A \sin \gamma z + B \cos \gamma z. \tag{11}$$

Исходя из соотношений (9) - (11), получаем решение (12) – (13) задачи (8) – (10):

$$W_2\left(z\right) = W_{2,n}\left(z\right) = \cos\left(\gamma_n z\right), \tag{12}$$

$$\gamma_n = \frac{\pi}{h}\left(2n - 1\right), \; n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Отсюда следует, что функция $W_1\left(x, y\right)$ также зависит от $\gamma_n$ ($W_1\left(x, y\right) = W_{1,n}\left(x, y\right)$), а значит, вид функции $W\left(x, y, z\right)$ следует искать в следующем виде:

$$W\left(x, y, z\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} W_{1,n}\left(x, y\right) W_{2,n}\left(z\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} W_{1,n}\left(x, y\right) \cos\left(\gamma_n z\right), \tag{14}$$

при этом функции $W_{1,n}(x,y)$ удовлетворяют уравнению (7) при $\gamma=\gamma_n$ в области $G=\left\{(x,y)\Big|E^2\setminus\left\{|x|<\frac{l}{2},\ \ y=0\right\}\right\}$.

Ввиду того, что функция $W(x,y,z)$ симметрична по своим аргументам, т. е. выполнены равенства

$$W(-x,y,z)=W(x,-y,z)=W(-x,-y,z)=W(x,y,z),$$

то и функции $W_{1,n}(x,y)$ также обладают такой симметрией, т. е.

$$W_{1,n}(-x,y)=W_{1,n}(x,-y)=W_{1,n}(-x,-y)=W_{1,n}(x,y) \tag{15}$$

Поэтому с учетом равенств (15), а также граничных условий (4), (5) получим следующую краевую задачу для функций $W_{1,n}(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 W_{1,n}(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_{1,n}(x,y)}{\partial y^2}=\gamma_n^2 W_{1,n}(x,y),\ 0<x<\frac{l}{2},\ y>0, \tag{16}$$

$$\left.\left\{\frac{\partial W_{1,n}(x,y)}{\partial y}\right\}\right|_{y=0}=\frac{4q(-1)^{n+1}}{h\lambda\gamma_n},\ 0<x<\frac{l}{2}, \tag{17}$$

$$\left.\left\{\frac{\partial W_{1,n}(x,y)}{\partial x}\right\}\right|_{x=0}=0, \tag{18}$$

$$\left.\left\{\frac{\partial W_{1,n}(x,y)}{\partial y}\right\}\right|_{y=0}=0,\ x>\frac{l}{2}, \tag{19}$$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} W_{1,n}(x,y)=0. \tag{20}$$

Граничное условие $(13)$ следует из условия (4) после подстановки в него (14):

$$-\lambda\frac{\partial W(M)}{\partial n}=q,\quad M\in S_T\Leftrightarrow\cos(\gamma_n z)\sum_{n=1}^{+\infty}\left.\left\{\frac{\partial W_{1,n}(x,y)}{\partial y}\right\}\right|_{y=0}=\frac{q}{\lambda},\quad 0<x<\frac{l}{2},\quad 0<z<\frac{h}{2},$$

и разложения правой части, т. е. $\frac{q}{\lambda}$ в ряд Фурье по $\cos(\gamma_n z)$.

Решение краевой задачи (16) – (20) отыскивается с помощью косинус преобразования Фурье по переменной $x$:

$$\overline{W}_{1,n}(\omega,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}W_{1,n}(x,y)\cos(\omega x)\,dx,\quad \omega\in\mathbb{R}. \tag{21}$$

В результате применения (21) к (16) получим, с учетом (18), (20) следующее уравнение для величины $\overline{W}_{1,n}(\omega,y)$:

$$\frac{d^2\overline{W}_{1,n}(\omega,y)}{dy^2}-\left(\omega^2+\gamma_n^2\right)\overline{W}_{1,n}(\omega,y)=0\,. \tag{22}$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (22) при $y>0$ имеет вид:

$$\overline{W}_{1,n}(\omega,y)=C_n(\omega)e^{-y\sqrt{\omega^2+\gamma_n^2}}\,. \tag{23}$$

Отсюда, применяя формулу обращения, получим следующее выражение для $\overline{W}_{1,n}(\omega,y)$:

$$W_{1,n}(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}C_n(\omega)e^{-y\sqrt{\omega^2+\gamma_n^2}}\cos(\omega x)\,d\omega. \tag{24}$$

Неизвестную пока функцию $C_n(\omega)$ найдем, удовлетворяя граничным условиям (17), (19). В результате получим уравнение:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}C_n(\omega)\sqrt{\omega^2+\gamma_n^2}\cos(\omega x)\,d\omega=f_n(x), \tag{25}$$

где функция $f_n(x)$ имеет вид:

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{4q(-1)^n}{h\lambda\gamma_n}, & 0<x<\dfrac{l}{2},\\[2ex] 0, & x>\dfrac{l}{2}.\end{cases} \tag{26}$$

Решение интегрального уравнения (25) с учетом (26) имеет вид:

$$C_n(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4q(-1)^n}{h\lambda\gamma_n\omega}\frac{\sin\dfrac{\omega l}{2}}{\sqrt{\omega^2+\gamma_n^2}}\,. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (24) получим следующее выражение для $W_{1,n}(x,y)$:

$$W_{1,n}(x,y)=\frac{8q(-1)^n}{\pi h\lambda\gamma_n}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-y\sqrt{\omega^2+\gamma_n^2}}}{\sqrt{\omega^2+\gamma_n^2}}\sin\frac{\omega l}{2}\cos(\omega x)\frac{d\omega}{\omega}\,. \tag{28}$$

Подставив (28) в формулу (14) получим решение исходной задачи (2) - (5):

$$W(x,y,z)=\frac{8q}{\pi h\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos(\gamma_n z)}{\gamma_n}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-|y|\sqrt{\omega^2+\gamma_n^2}}}{\sqrt{\omega^2+\gamma_n^2}}\sin\frac{\omega l}{2}\cos(\omega x)\frac{d\omega}{\omega}\,, \tag{29}$$

где замена $e^{-y\sqrt{\omega^2+\gamma_n^2}}$ на $e^{-|y|\sqrt{\omega^2+\gamma_n^2}}$ происходит ввиду того, что решение задачи (16) – (20) было произведено для области $y>0$, но, исходя из соображений симметрии (15), оно должно остаться верным и для области $y<0$.

**Обсуждение результатов.** Таким образом, развитый в данной работе подход позволяет найти тепературное поле в пластине с разрезом при заданном тепловом потоке на берега разреза. Полученное для температурного поля выражение (29) позволяет спрогнозировать долговечность пластины с разрезом в условиях воздействия на нее стационарного температурного поля на основе последующего расчета ее термодинамического потенциала. Экстремум этого потенциала как функции длины разреза определяет условия начала его роста, а значит, начало разрушения пластины

**Выводы**

1. Развит метод нахождения температурного поля в пластине с разрезом путем применения методов разделения переменных и преобразования Фурье.

2. Предложенный подход может быть использован при нахождении температурного поля в пластине с разрезом и при других граничных условиях на берегах разреза и на поверхности пластины.

**Обозначения**

$D$ — область переноса;

$h$ — толщина трещины, м;

$l$ — длина трещины, м;

$q$ — плотность теплового потока на берегах трещины, Дж/(м$^2 \cdot$ с)

$S_0$ — внешняя поверхность образца, м$^2$;

$S_{\text{т}}$ — поверхность трещины (Т — трещина), м$^2$;

$T(x, y, z)$ — температура в точке с прямоугольными декартовыми координатами $(x, y, z)$, K;

$T_c$ — температура окружающей среды, К;

$W(x, y, z) = T(x, y, z) - T_c$, К;

Ф — термодинамический потенциал системы, Дж;

ΔФ — приращение термодинамического потенциала системы, Дж;

$\lambda$ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м$\cdot$К).

## Литература

1. Шевелев В.В. Термодинамический подход к формулировке термомеханического критерия разрушения. //Автоматизированная подготовка машиностроительного производства, технология и надежность машин, приборов и оборудования. Материалы Международной научно-технической конференции. — Вологда, ВоГТУ, 2005. Т. 1, с. 177 — 180.

2. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М.: Высшая школа, 2001. 550 с.