

**КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ
В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, НАГРЕВАЕМОМ ТОЧЕЧНЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ
ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ.**

В.А. Пинскер

ОАО НПО «Буровая техника» – ВНИИБТ, Москва, Россия , e-mail : v.pinsker@vniibt.ru

АННОТАЦИЯ

В замкнутом интегральном виде получено точное автомодельное решение одной из основных задач несвязанной термоупругости. На оси симметрии и на свободной поверхности все напряжения определены в явном виде. Исследованы асимптотики найденных формул при малых и больших значениях безразмерного времени, вблизи и вдали от источника тепла. В явном виде получены выражения для всех компонент в начале нагрева. Аналитически рассчитаны уравнения асимптот для нулевых изобар. Найденны максимальные значения всех компонент термоупругого поля при различных значениях коэффициента Пуассона. Показано, что при стационарном режиме нагрева вся совокупность изобар сводится к одной нормализованной изобаре. Определен деформационный профиль свободной границы. Исследована возможность механических разрушений в нагреваемом полупространстве.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поверхностный нагрев твердых упругих тел приводит к возникновению в них нестационарных температурных полей [1] и, как следствие, к развитию термических напряжений. Описание и анализ термонапряженного состояния таких тел представляет значительный научный и практический интерес. В качестве модельной задачи позволяющей выявить основные закономерности пространственного распределения и временной эволюции термоупругого поля в массивных твердых телах рассмотрим нагрев линейно-упругого полуограниченного тела расположенным на его поверхности источником тепла столь малых размеров, что его приближенно можно считать сосредоточенным в некоторой точке. Подобные источники формируются на поверхности обрабатываемых материалов в частности, при воздействии остросфокусированных лазерных и электронных пучков в таких технологических процессах как

точечная сварка, сверление узких отверстий, прецизионная механическая обработка с локальным выделением тепла при контактном взаимодействии, термическое раскалывание, высокотемпературное упрочнение и т.д.

Задача об установившемся режиме нагрева полупространства точечным тепловым источником рассматривалась в монографии [2], однако детальный анализ общей нестационарной проблемы в квазистатической постановке не был проведен.

2. ПОСТАНОВКА ТЕРМОУПРУГОЙ ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

Пусть имеется однородное и изотропное линейно-упругое полупространство $z \geq 0$, первоначально холодное и свободное от напряжений и массовых сил, которое в момент времени $t = 0$ начинает нагреваться непрерывно действующим точечным источником постоянной мощности Q , расположенным на поверхности.

Границу полупространства считаем теплоизолированной и свободной от нормальных и касательных напряжений. Теплофизические и упругие характеристики среды не зависят от температуры. Требуется определить поле несвязанных, затухающих на бесконечности квазистатических термоупругих напряжений в полупространстве в любой момент времени.

Ясно, что рассматриваемая задача является осесимметричной. Введем цилиндрическую систему координат Orz , где r – радиальная ось, лежащая вдоль границы; z – ось симметрии, направленная вглубь полупространства по нормали к его поверхности, а начало координат (точку O) совместим с тепловым источником.

Температурное поле точечного источника тепла $T(r,z,t)$ в полуограниченном теле при данных краевых условиях хорошо известно [1]; оно является сферически-симметричным и имеет вид:

$$T(r, z, t) = Q \operatorname{erfc}(R/2\sqrt{at})/2\pi kR. \quad (1)$$

$$\text{Здесь } R = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Далее перейдем к рассмотрению соответствующей термоупругой задачи. Все искомые компоненты поля несвязанных термических напряжений должны удовлетворять уравнениям квазистатической термоупругости, соотношениям Дюамеля-Неймана, условиям совместности и уравнениям равновесия.

Для построения нестационарного термоупругого поля, где отличными от нуля будут только четыре компоненты – сдвиговая, радиальная, окружная и осевая, воспользуемся потенциалом перемещений Гудьера Φ [2], который является частным решением эллиптического уравнения Пуассона $\Delta\Phi = (1+\nu)\alpha T/(1-\nu)$ и определяется выражением:

$$\Phi(r, z, t) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha a \left[\int_0^t T(r, z, \xi) d\xi - tT(r, z, \infty) \right]. \quad (2)$$

Интегрируя равенство (2) находим точную формулу для величины Φ , которая здесь не приводится ввиду ее громоздкости. Однако термические напряжения, соответствующие потенциалу Φ не удовлетворяют заданным нулевым граничным условиям на свободной поверхности.

Следовательно, к полученным выражениям необходимо добавить компоненты "бестемпературного" поля напряжений, получаемого из решения системы однородных уравнений теории линейной упругости с помощью бигармонической функции Лява для полупространства. В результате находим точные формулы для всех безразмерных составляющих термоупругого поля $\sigma_{ij}(r, z, t)$ в интегральном виде.

Отметим, что в постановке задачи отсутствуют характерные линейные размеры, так что найденные и приведенные для удобства к безразмерному виду компоненты термоупругого поля (как, впрочем, и температура), будут выражаться через две независимые автомодельные переменные ρ и x : $\rho = r/2\sqrt{at}$, $x = z/2\sqrt{at}$, $\theta(\rho, x) = 4\pi k\sqrt{at}T(r, z, t)/Q$, $s = R/\sqrt{at}$,

$$p_{ij}(\rho, x) = 4\pi k\sqrt{at}\sigma_{ij}(r, z, t) / \alpha EQ.$$

В итоге, распределение температуры и термических напряжений запишется следующим образом:

$$\theta(\rho, x) = \operatorname{erfc}(s)/s \quad (3)$$

$$(1-\nu)p_{xx}(\rho, x) = \int_0^\infty (1+2\lambda x) \exp(-2\lambda x) f(\lambda) J_0(2\lambda\rho) d\lambda + [(\rho^2 - 2x^2) f(s)/2s^4 - 2\rho^2 \operatorname{erfc}(s)/s^2] / 2s \quad (4)$$

$$(1-\nu)p_{px}(\rho, x) = 2x \int_0^\infty \lambda \exp(-2\lambda x) f(\lambda) J_1(2\lambda\rho) d\lambda - 3\rho x [f(s) - 4s^2 \operatorname{erfc}(s)/3] / 4s^5 \quad (5)$$

$$(1-\nu)p_{\rho\rho}(\rho, x) = \int_0^\infty \exp(-2\lambda x) f(\lambda) [(1-2\lambda x) J_0(2\lambda\rho) - (1-2\nu-2\lambda x) J_1(2\lambda\rho)/2\lambda\rho] d\lambda + [(x^2 - 2\rho^2) f(s)/2s^4 - 2x^2 \operatorname{erfc}(s)/s^2] / 2s \quad (6)$$

$$(1 - \nu) p_{\phi\phi}(\rho, x) = \int_0^{\infty} f(\lambda) [(1 - 2\nu - 2\lambda x) J_1(2\lambda\rho) / 2\lambda\rho + 2\nu J_0(2\lambda\rho)] \exp(-2\lambda x) d\lambda + f(s) / 4s^3 - \operatorname{erfc}(s) / s. \quad (7)$$

Здесь $f(\lambda) = \operatorname{erf}(\lambda) - 2\lambda \exp(-\lambda^2) / \sqrt{\pi} + 2\lambda^2 \operatorname{erfc}(\lambda)$.

Для упрощения асимптотического разложения компонент p_{ij} при больших значениях автомодельных координат ρ и x , соответствующих либо малым временам нагрева либо значительному удалению от источника тепла, удобно определить приближенное равенство $f(\lambda) \approx 2\lambda^2$ при $\lambda \ll 1$.

Найденное поле термоупругих напряжений удовлетворяет двум уравнениям равновесия

$$\frac{\partial p_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial p_{\rho x}}{\partial x} + \frac{p_{\rho\rho} - p_{\phi\phi}}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial p_{\rho x}}{\partial \rho} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{p_{\rho x}}{\rho} = 0. \quad \text{Отсюда следует, что ввиду ограниченности}$$

величин p_{ij} на оси симметрии выполняются соотношения

$$p_{\rho x}(0, x) = 0, \quad p_{\rho\rho}(0, x) = p_{\phi\phi}(0, x). \quad (8)$$

Как видно из формул (4)–(7), в общем случае компоненты тензора напряжений выглядят весьма громоздко. Однако при некоторых значениях аргументов возможны существенные упрощения. В частности, на оси симметрии удается преобразовать формулы (4), (6), (7) к более удобному виду:

$$(1 - \nu) p_{xx}(0, x) = 2/x^3 - 2(2/x^2 - 1)/\sqrt{\pi} - f(x)/2x^3 - (2x - 3/x + 2/x^3) \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x), \quad (9)$$

$$2(1 - \nu) x p_{\rho\rho}(0, x) = 2(1 - \nu) x p_{\phi\phi}(0, x) = f(x)/2x^2 - \operatorname{erfc}(x) - 2x/\sqrt{\pi} - (1 - \nu)(1 - 2x/\sqrt{\pi})/x^2 + [2x^2 - 1 + 2\nu + (1 - \nu)/x^2] \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x). \quad (10)$$

Анализ полученных выражений (4), (6), (7) показывает, что для осевой, радиальной и окружной компонент выполняются равенства $dp_{ij}(0, x)/d\rho = 0$. Таким образом, для этих напряжений ось симметрии является линией экстремумов, а соответствующие изобары будут подходить к ней под прямым углом. Заметим также, что в формулах (4) и (5) коэффициент Пуассона определяет лишь величину масштабного множителя $1/(1 - \nu)$ и не влияет на пространственно-временной характер распределения переменных p_{xx} и $p_{\rho x}$.

3. АНАЛИЗ ПОЛЯ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

3.1 Осевое напряжение

Компонента p_{xx} определяется общим выражением (4), которое упрощается при $\rho = 0$ (см.(9)).

Кроме того, можно найти асимптотическое выражение для осевого напряжения в начале нагрева (либо на большом расстоянии от источника тепла):

$$p_{xx}(\rho \gg 1, x \gg 1) \approx 3x^2(2x^2 - 3\rho^2)/4(1-\nu)s^7. \quad (11)$$

Отсюда легко определяется асимптота нулевой изобары p_{xx} , которая имеет вид прямой линии $x = \sqrt{3/2} \rho \approx 1.2247 \rho$, выходящей из начала координат и наклоненной к оси ρ под углом 50.8° .

На значительном расстоянии от источника тепла изобара $p_{xx} = 0$ будет приближаться к асимптоте снизу. Расчеты по формулам (4), (9) показывают, что в нагреваемом полупространстве возможны как положительные так и отрицательные значения осевого напряжения. Изобара $p_{xx}(\rho, x) = 0$, разделяющая внутреннюю, примыкающую к оси симметрии область растяжения и окружающую ее внешнюю область сжатия, начинается на свободной поверхности в некоторой точке с радиальной координатой ρ_{0a} . Значение $\rho_{0a} = 1.2552$ определяется из условия $d^2 p_{xx}(\rho_{0a}, 0)/dx^2 = 0$, которое с помощью формулы (4) сводится сначала к интегральному равенству

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} - \lambda \operatorname{erfc}(\lambda) \right] J_0(\lambda \rho_{0a}) \lambda^3 d\lambda = 0, \text{ а затем, после вычисления интегралов – к неявному}$$

трансцендентному уравнению $9\sqrt{\pi} \exp(\rho_{0a}^2) \operatorname{erf}(\rho_{0a}) = 2\rho_{0a}(4\rho_{0a}^4 + 6\rho_{0a}^2 + 9)$.

Ось симметрии является для компоненты p_{xx} линией максимумов. Расчеты по формуле (9) показывают, что при $\rho = 0$ наибольшее возможное растяжение достигается на глубине $x = 1.1$ и равно $0.07357/(1-\nu)$. Асимптотики распределения компоненты p_{xx} на оси (см. Рис.1):

$$p_{xx}(0, x \ll 1) \approx 4x^2/5(1-\nu)\sqrt{\pi}, \quad p_{xx}(0, x \gg 1) \approx 3/2(1-\nu)x^3$$

Максимальное осевое сжатие достигается при $\rho = 2.2$, $x = 0.94$ и составляет величину $p_{xx} = -0.0055/(1-\nu)$. Отметим, что наибольшее осевое растяжение в 13.4 раз превосходит абсолютную величину наибольшего осевого сжатия.

Изобары, соответствующие отрицательным значениям напряжения окружают точку максимального сжатия и по форме напоминают эллипсы с главной осью, наклоненной к свободной поверхности под углом 41° . В свою очередь, совокупность изобар, соответствующих положительным значениям p_{xx} окружает находящуюся на оси симметрии точку наибольшего растяжения, причем чем ближе к точке максимума расположены изобары, тем более своей формой они напоминают полукруг и наоборот, асимметрия возрастает по мере уменьшения численных значений p_{xx} , характерных для каждой изобары (см. Рис.2).

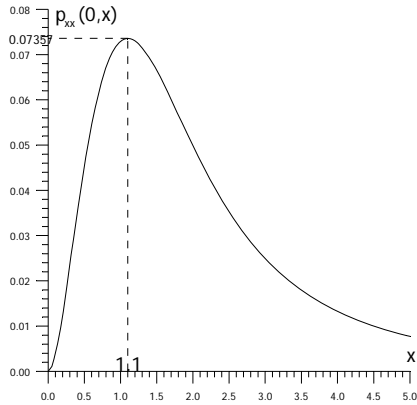


Рис.1 Распределение p_{xx} на оси

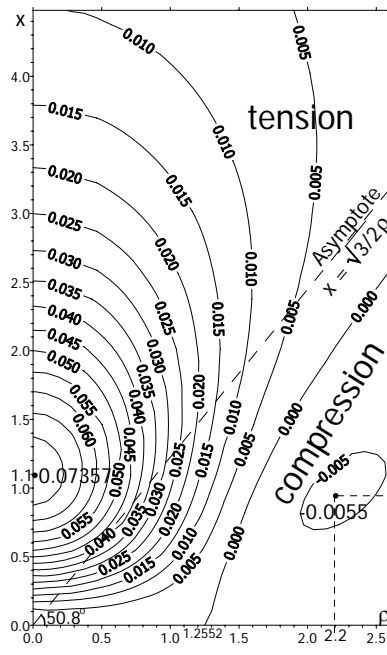


Рис.2 Поле изобар p_{xx}

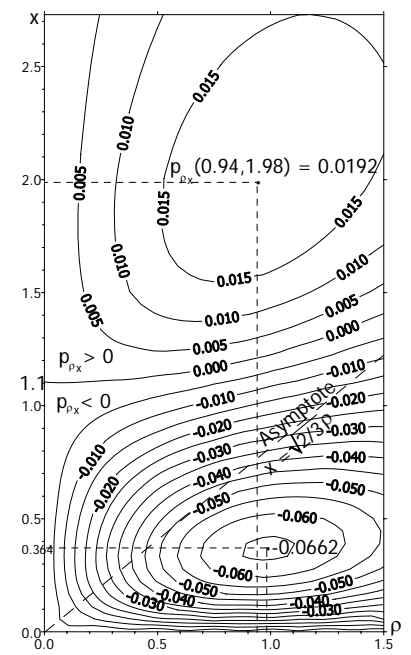


Рис.3 Поле изобар p_{rx}

3.2 Напряжение сдвига

Компонента p_{rx} определяется общей формулой (5), которая позволяет найти явное асимптотическое выражение для напряжения сдвига в начале нагрева (либо на большом расстоянии от источника тепла):

$$p_{rx}(\rho \gg 1, x \gg 1) \approx 6\rho x(3x^2 - 2\rho^2)/(1-\nu)s^7. \quad (12)$$

Отсюда легко определяется асимптота нулевой изобары p_{rx} , которая имеет вид прямой линии $x = \sqrt{2/3} \rho \approx 0.8165 \rho$, выходящей из начала координат и наклоненной к оси ρ под углом 39.23° .

Наибольшее в отрицательной области напряжение сдвига достигается при $\rho = 0.983$, $x = 0.365$ и составляет величину $p_{rx} = -0.0331/(1-\nu)$, тогда как в области положительных значений максимум достигается при $\rho = 0.943$, $x = 1.983$ и составляет величину $p_{rx} = 0.0096/(1-\nu)$. Отношение обоих этих экстремумов равно $0.0331/0.0096 = 3.45$.

Изобара $p_{rx}(\rho, x) = 0$, разделяющая нижнюю, примыкающую к свободной поверхности область отрицательных значений напряжения сдвига и расположенную над ней область положительных значений, начинается на оси симметрии в точке, лежащей на глубине $x = 1.1$ (там, где величина p_{xx} , достигает абсолютного максимума) и отходит от оси ρ под прямым углом. Далее нулевая изобара постепенно изгибается, удаляясь от свободной поверхности и асимптотически приближается сверху к прямой линии $x = 0.8165\rho$. Как для положительных, так и для

отрицательных значений $p_{\rho x}$ поле изобар представляет собой совокупность вложенных одна в другую замкнутых линий, по форме напоминающих эллипсы, содержащих внутри себя точки, соответствующие максимальным напряжениям. Чем больше абсолютное значение $p_{\rho x}$, относящееся к каждой конкретной изобаре, тем ближе ее форма к окружности (см. Рис.3). В стационарном режиме как осевая компонента, так и компонента сдвига исчезают.

3.3 Радиальное напряжение

Компонента $p_{\rho\rho}$ определяется общим выражением (6), которое упрощается на оси симметрии (10), а также на границе полупространства $x = 0$:

$$p_{\rho\rho}(\rho, 0) = - \{ \operatorname{erfc}(\rho) + (2 - \nu)[\operatorname{erf}(\rho)/2\rho - \exp(-\rho^2)/\sqrt{\pi}] / (1 - \nu) \} / \rho. \quad (13)$$

Сжимающее напряжение бесконечно в начале координат; оно монотонно убывает по абсолютной величине по мере удаления от источника тепла и стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$ (см. Рис.5).

Для малых и больших ρ формула (13) упрощается:

$$|p_{\rho\rho}(\rho \ll 1, 0)| \approx 1/\rho - 2(1 - 2\nu)/3\sqrt{\pi}(1 - \nu), \quad |p_{\rho\rho}(\rho \gg 1, 0)| \approx (2 - \nu)/(1 - \nu)2\rho^3.$$

На оси симметрии (см. Рис.4) ограничимся рассмотрением двух предельных случаев: 1) $\nu = 0$. По мере углубления напряжение $p_{\rho\rho}(0, x)$ увеличивается, на глубине $x = 1.286$ меняет знак, далее достигает максимума $p_{\rho\rho}(0, 1.621) = 0.009$, затем на глубине $x = 2.873$ снова меняет знак, при $x = 3.93$ принимает значение $p_{\rho\rho} = -0.0009$, после чего стремится к нулю. 2) $\nu = 1/2$. По мере углубления напряжение $p_{\rho\rho}(0, x)$ увеличивается, на глубине $x = 0.842$ меняет знак, далее достигает максимума $p_{\rho\rho}(0, 1.275) = 0.09$, после чего плавно стремится к нулю.

Приближенное выражение для радиальной компоненты в начале нагрева либо на большом расстоянии от источника тепла имеет вид: $p_{\rho\rho}(\rho \gg 1, x \gg 1) = [3\rho^2(4x^2 - \rho^2)/s^4 - 1 + 2\nu]/4(1 - \nu)s^3$.

Отсюда легко определяются асимптоты нулевой изобары: 1) при $\nu = 0$ их две: $x = \sqrt{5 \pm \sqrt{21}}\rho$, т.е. $x = 3.1\rho$ и $x = 0.646\rho$; 2) при $\nu = 1/2$ — одна: $x = \rho/2$.

3.4 Окружное напряжение

Компонента $p_{\phi\phi}$ определяется общим выражением (7), которое упрощается на оси симметрии (10), а также на поверхности полупространства $x = 0$: $p_{\phi\phi}(\rho, 0) = (1 - 2\nu)[\operatorname{erf}(\rho)/2\rho - \exp(-\rho^2)/\sqrt{\pi}]/(1 - \nu)\rho^2$.

Здесь окружное напряжение всегда неотрицательно, т.е. при $0 \leq \nu < 1/2$ на границе имеет место

только азимутальное растяжение, тогда как при $\nu = 1/2$ тождественно выполняется равенство $p_{\phi\phi}(\rho, 0) = 0$ (см. Рис.6). При малых и больших ρ эта формула упрощается:

$$p_{\phi\phi}(\rho \ll 1, 0) \approx 2(1-2\nu)(1-3\rho^2/5)/3\sqrt{\pi}(1-\nu), \quad p_{\phi\phi}(\rho \gg 1, 0) \approx (1-2\nu)/(1-\nu)2\rho^3.$$

Отметим, что непосредственно на самом точечном источнике тепла значение компоненты $p_{\phi\phi}$ неоднозначно (см. Рис.7) и заключено в диапазоне $-\infty < p_{\phi\phi}(0,0) \leq 0.376(1-2\nu)/(1-\nu)$.

Приближенное выражение для окружной компоненты в начале нагрева (либо на большом расстоянии от источника тепла) запишется в виде : $p_{\phi\phi}(\rho \gg 1, x \gg 1) \approx (1-2\nu)(2\rho^2 - x^2)/4(1-\nu)s^5$.

Отсюда видно, что при $0 \leq \nu < 1/2$ асимптота нулевой изобары имеет вид $x = \sqrt{2} \rho$, тогда как при $\nu = 1/2$ компонента $p_{\phi\phi}(\rho \gg 1, x \gg 1)$ тождественно равна нулю и у изобары $p_{\phi\phi} = 0$ нет асимптоты.

Обратим внимание также и на то, что на свободной поверхности разность $p_{\phi\phi}(\rho,0) - p_{\rho\rho}(\rho,0)$ перестает зависеть от величины коэффициента Пуассона. Рис.5 Распределение $p_{\rho\rho}$ на границе

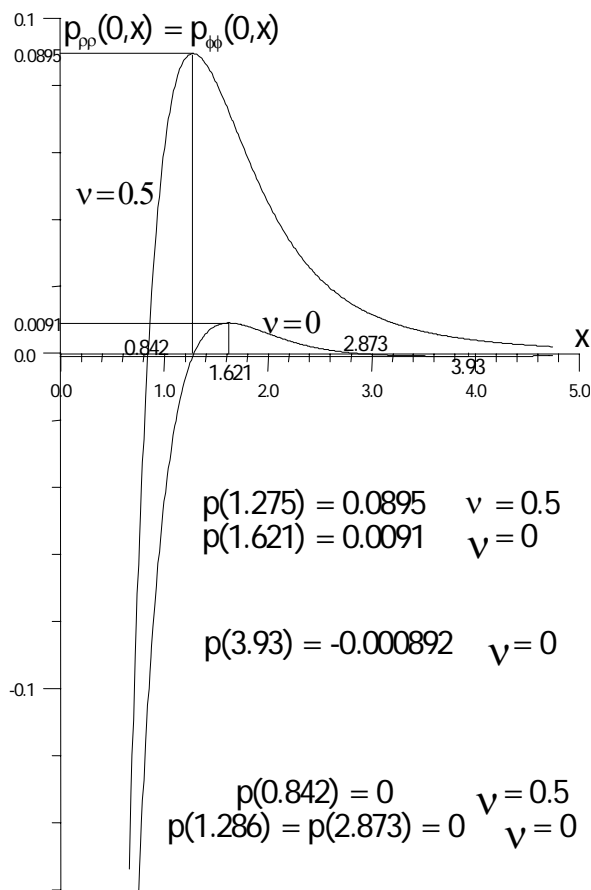


Рис.4 Распределение $p_{\rho\rho}$ и $p_{\phi\phi}$ на оси.

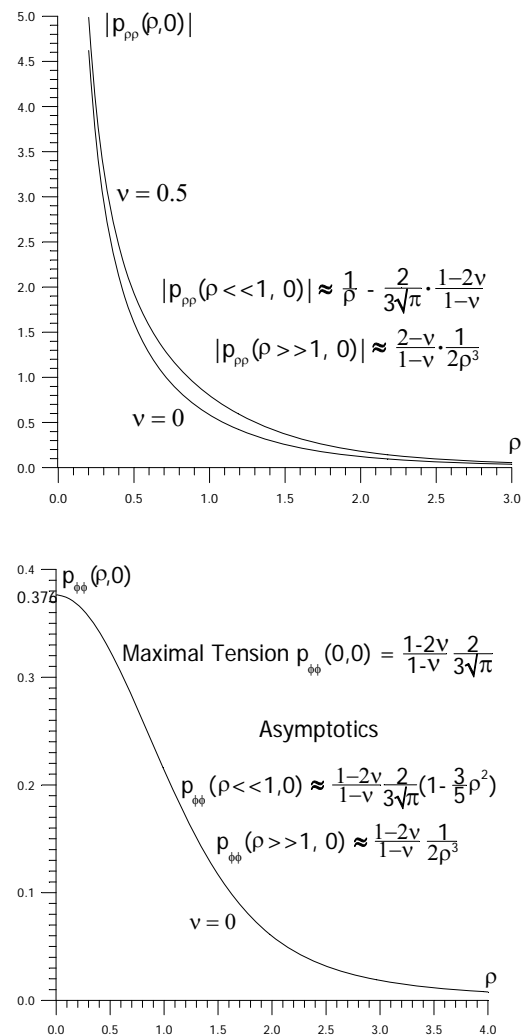


Рис.6 Распределение $p_{\phi\phi}$ на границе

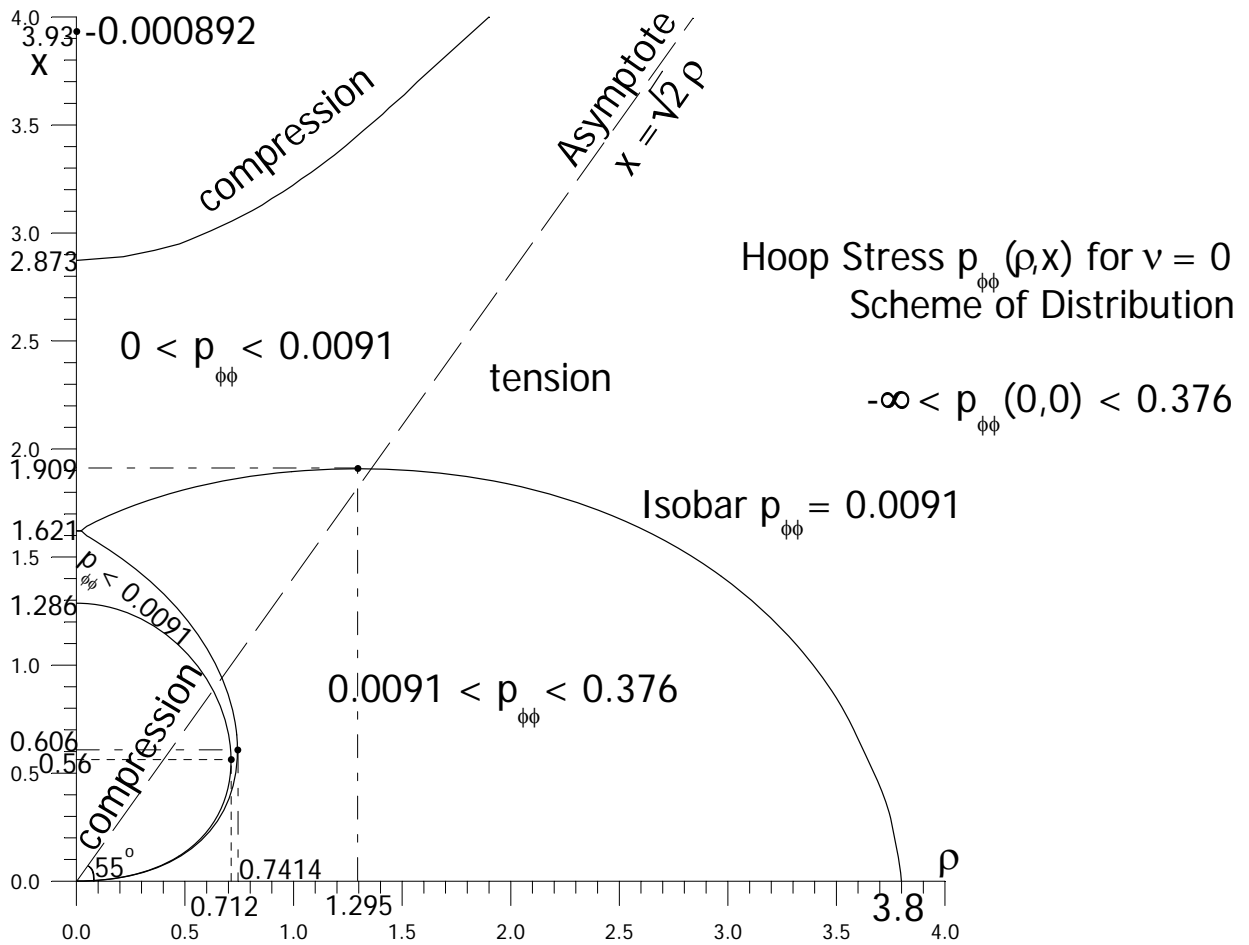


Рис.7 Диаграмма распределения изобар окружного напряжения при $\nu = 0$

3.5 Стационарное термоупругое поле.

Известно [2], что при длительном поверхностном нагреве полугограниченного тела постоянным потоком тепла, внутри этого тела реализуется плосконапряженное состояние, при котором отличными от нуля будут только радиальная и окружная компоненты:

$$\sigma_{rr}(r, z, \infty) = -E\alpha Q / 2\pi k(z + R), \quad (14)$$

$$\sigma_{\phi\phi}(r, z, \infty) = -E\alpha Q [1/R - 1/(z + R)] / 2\pi k. \quad (15)$$

При этом в полупространстве возможны только сжимающие напряжения; везде за исключением оси симметрии выполняется неравенство $|\sigma_{rr}| > |\sigma_{\phi\phi}|$ и обе компоненты перестают зависеть от коэффициента Пуассона. Заметим, что в начале координат окружное напряжение теряет однозначность и может принимать значения от 0 до $-\infty$. Это неустранимый дефект модели точечного источника тепла. Картины распределения обеих компонент сильно различаются.

Радиальное напряжение $|\sigma_{rr}|$, в каждом сечении $r = \text{const}$ достигая максимального значения на границе полупространства, монотонно убывает с глубиной.

В свою очередь наибольшие значения $|\sigma_{\varphi\varphi}|$ при всех $r = \text{const} > 0$ достигаются на некоторой линии максимумов, уравнение которой определяется из условия $d\sigma_{\varphi\varphi}/dz = 0$. Дифференцирование выражения (15) приводит к равенству $r^4 = r^2 z^2 + z^4$. Отсюда находим выражение для линии максимумов $z = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} r \approx 0.786 r$. Это прямая, выходящая из начала координат под углом 38.17° к свободной поверхности.

Напомним, что изобары обеих компонент подходят к оси симметрии под прямым углом. Что же касается границы полупространства, то несложные расчеты показывают, что все изобары радиального напряжения выходят на свободную поверхность под углом 45° , тогда как изобары окружного напряжения при $z \ll 1$ составляют с осью r угол, близкий к 180° , а при $R \rightarrow 0$ все они сходятся в начале координат. Изобары σ_{rr} имеют форму парабол, начинающихся на оси симметрии и заканчивающихся на свободной поверхности, тогда как изобары $\sigma_{\varphi\varphi}$ начинаются на оси симметрии, а заканчиваются непосредственно в точке расположения теплового источника, описывая выпуклые кривые, напоминающие полуэллипсы, сплюснутые в радиальном направлении.

Стационарное термоупругое поле допускает нормировку, позволяющую как для радиального, так и для окружного напряжений свести всю совокупность изобар к одной единственной изобаре. Введя согласно [3] новые безразмерные координаты $v = r/b$, $y = z/b$, где $b = E\alpha Q/2\pi k|\sigma|$, получаем уравнение для нормализованной изобары радиального напряжения $2y = 1 - v^2$, т.е. это парабола, заключенная в пределах $0 \leq v \leq 1$, $0 \leq y \leq 1/2$. Для окружной компоненты из (15) аналогичным образом получаем неявное уравнение изобары $2v^2 = 2y - y^2 - y\sqrt{y^2 + 4y}$. Линия, описываемая этой формулой пересекает ось симметрии $v = 0$ в двух точках $y = 0$ и $y = 1/2$, а максимально возможная радиальная координата нормализованной изобары равняется $v = 0.3$ (см. Рис.8).

Скорость установления стационарного поля термоупругих напряжений тем выше, чем больше величина коэффициента Пуассона.

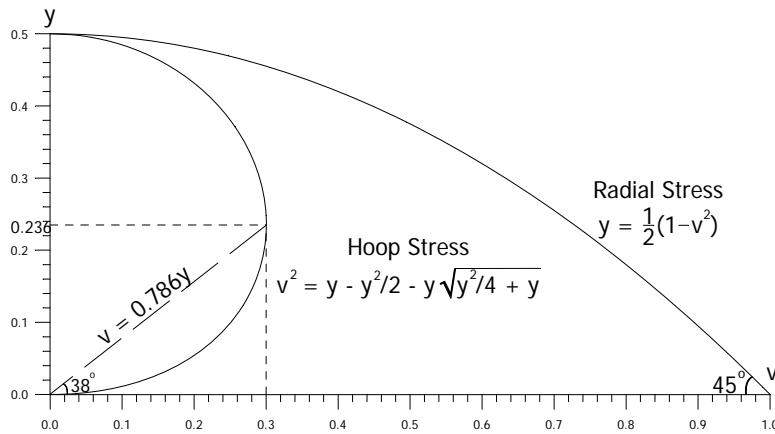


Рис.8 Нормированные стационарные изобары

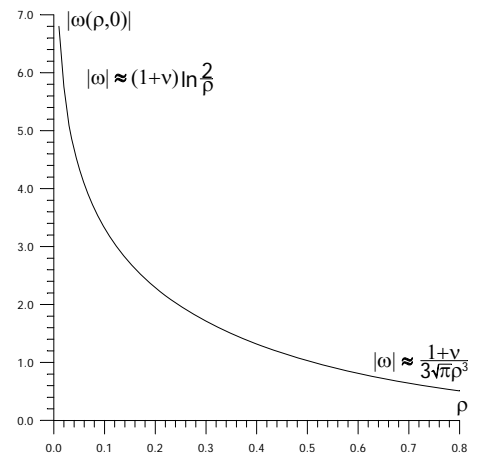


Рис.9 Профиль поверхности

4. РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИОННОГО КОНТУРА

Для определения нестационарного профиля свободной поверхности полупространства, возникающего вследствие термических деформаций при неоднородном нагреве, в соответствии с алгоритмом, изложенным в [2,3] найдено радиальное распределение осевой компоненты вектора упругих перемещений на границе $u_z(r,0,t)$:

$$\omega(\rho,0) = -(1+\nu)\{\rho^2 {}_3F_3(1,1,3/2;2,2,2; -\rho^2)/2 + 2\ln(2/\rho) - C - \exp(-\rho^2/2)[I_0(\rho^2/2) + I_1(\rho^2/2)]\}/2. \quad (16)$$

Здесь для удобства введена безразмерная величина осевого смещения $\omega(\rho,0) = 2\pi k u_z(r,0,t)/\alpha Q$.

Найденный профиль имеет форму гладкой кривой, монотонно убывающей по мере удаления от центра, где $|\omega| \rightarrow \infty$ к периферии, где $|\omega| \rightarrow 0$ (см. Рис.9). При малых и больших значениях координаты ρ находим асимптотические представления выражения (16):

$$\omega(\rho \ll 1,0) \approx -(1+\nu)\ln(2/\rho), \quad \omega(\rho \gg 1,0) \approx -(1+\nu)/3\sqrt{\pi}\rho^3$$

С течением времени абсолютная величина нормального смещения неограниченно возрастает и при $\tau \rightarrow \infty$ стационарной формы искривленного контура поверхности не существует.

5. ВЫВОДЫ

В работе теоретически исследована одна из классических задач несвязанной квазистатической линейной термоупругости. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании разрушения и трещинообразования в хрупких материалах под действием термических напряжений, вызванных поверхностным нагревом, например при термобурении горных пород, а также могут оказаться весьма полезными при изучении термических деформаций элементов

лазерной оптики. Укажем, что в силу линейности рассмотренной задачи, построенное решение будет являться асимптотическим приближением для решений множества других более сложных задач о поверхностном нагреве полуограниченных тел осесимметричными непрерывно действующими источниками тепла с произвольным распределением интенсивности при условии значительного удаления от области нагрева.

Работа выполнена при поддержке CDRF (проект НОЦ–РЕ009).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

T – температура, $^{\circ}\text{K}$; θ – безразмерная температура; r – радиальная координата, м; ρ – безразмерная радиальная координата; z – осевая координата, м; x – безразмерная осевая координата; t – время, с; E – модуль Юнга, H/m^2 ; a – коэффициент температуропроводности, $\text{m}^2/\text{с}$; k – коэффициент теплопроводности, $\text{Вт}/\text{m}^{\circ}\text{K}$; Q – мощность источника тепла, Вт; I_0, I_1, J_0, J_1 – функции Бесселя от мнимых и действительных аргументов нулевого и первого порядка; σ_{ij} – размерные компоненты тензора напряжений, H/m^2 ; p_{ij} – безразмерные компоненты тензора напряжений; ν – коэффициент Пуассона, $0 \leq \nu \leq 1/2$. Φ – термоупругий потенциал перемещений; Δ – лапласиан; в цилиндрических координатах $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)(\partial/\partial r) + \partial^2/\partial z^2$; α – коэффициент линейного температурного расширения, $^{\circ}\text{K}^{-1}$; $u_z(r,0,t)$ – величина осевого перемещения поверхности, м; $\omega(\rho,0)$ – безразмерная величина осевого перемещения; ${}_3F_3$ – обобщенная гипергеометрическая функция; $C = 0.5772$ – постоянная Эйлера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
3. Пинскер В.А. Квазистатические термоупругие поля в полуограниченном теле, нагреваемом точечным поверхностным источником тепла постоянной мощности. Труды 4-й РНКТ, М.: Изд-во МЭИ, 2006. Т.7. С.302-305.