УДК 669.86:536.21

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ

Г. В. Кузнецов[1], М. А. Шеремет[2]

[1] *Теплоэнергетический факультет, Томский политехнический университет, Томск, Россия*
[2] *Механико-математический факультет, Томский государственный университет, Томск, Россия*

Проведено математическое моделирование сопряженного тепломассопереноса в прямоугольной области с локальным источником тепловыделения в условиях конвективно-радиационного теплообмена с внешней средой. Математическая модель сформулирована в безразмерных переменных "функция тока – вектор завихренности скорости - температура - концентрация". Краевая задача решена численно методом конечных разностей. Анализ проведен в широком диапазоне изменения определяющих безразмерных комплексов: $10^4 \le \mathrm{Gr} \le 10^7$, $10^2 \le \mathrm{Re} \le 10^3$, $\mathrm{Br} = -5,\ 1,\ 5$. *Получены распределения термогидродинамических и диффузионных параметров, характеризующие существенные особенности исследуемого процесса. Установлены масштабы влияния внутреннего массопереноса на интегральные и локальные термические характеристики.*

Введение

Анализ взаимного влияния конвективного теплопереноса в газовой полости и кондуктивной теплопередачи в элементах твердого материала при наличии внутреннего массопереноса имеет широкие практические приложения (радиоэлектронная аппаратура и электронная техника [1, 2], строительные сооружения [3, 4], технологические резервуары в химической промышленности [5]).

Целью настоящей работы является математическое моделирование сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в области (рис. 1), содержащей источники тепло и массовыделения, в условиях конвективно-радиационного теплообмена с внешней средой.

Математическая модель

Рассматривается краевая задача нестационарного сопряженного тепломассопереноса для области, представленной на рис. 1. Область решения включает как элементы твердого материала, имеющие различные размеры и теплофизические характеристики, так и газовую полость с источниками тепла и примеси. В полость подается поток газа (*8* на рис. 1), содержащий некоторую примесь максимальной концентрации. Через отверстие (*9* на рис. 1) происходит выход газовых масс. В зоне входного отверстия находится локальный источник примеси, концентрация в котором, также как и температура на источнике тепловыделения, остается постоянной в течение всего процесса. Горизонтальные стенки ($y = 0$, $y = L_y$, где L_y – размер рассматриваемой области решения по оси y) и вертикальная стенка ($x = L_x$, где L_x – размер рассматриваемой области решения по оси x), образующие газовую полость, предполагаются теплоизолированными с наружной стороны. На границе $x = 0$ осуществляется конвективно-радиационный теплообмен с окружающей средой.

Предполагается, что теплофизические свойства элементов твердого материала и газа не зависят от температуры, а режим течения является ламинарным. Газ считается ньютоновской жидкостью, несжимаемой и удовлетворяющей приближению Буссинеска. Движение газа и теплоотдача во внутреннем объеме принимаются плоскими, теплообмен излучением от источника тепловыделения и между стенами – пренебрежимо малым по сравнению с конвективным теплообменом, газ абсолютно прозрачным для теплового излучения. Также предполагается, что члены в уравнении энергии, характеризующие вязкую диссипацию и работу сил давления, пренебрежимо малы. Эффекты второго порядка (диффузионный термоэффект и термодиффузия) также не учитываются.

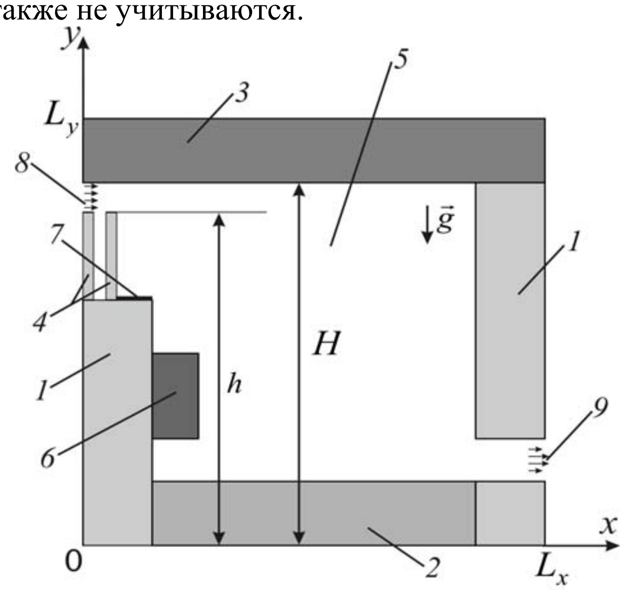

Рис. 1. Область решения рассматриваемой задачи:
1, 2, 3, 4 – элементы твердого материала;
5 – газовая полость; *6* – источник тепловыделения;
7 – источник примеси, *8* – входное отверстие;
9 – выходное отверстие

В такой постановке процесс переноса тепла и массы в рассматриваемой области (рис. 1) описывается системой нестационарных двумерных уравнений конвекции в приближении Буссинеска [6, 7] и уравнением диффузии [3, 4] в газовой полости, а также нестационарным уравнением теплопроводности для элементов твердого материала [8] с нелинейными граничными условиями.

Математическая модель сформулирована в безразмерных переменных “функция тока – вектор завихренности скорости – температура – концентрация”. В качестве масштаба расстояния выбрана длина рассматриваемой области решения по оси x. Для приведения к безразмерному виду системы уравнений использовались следующие соотношения:

$$X=\frac{x}{L_x},\ \ Y=\frac{y}{L_x},\ \ \tau=\frac{t}{t_0},\ \ U=\frac{u}{V_{\text{in}}},\ \ V=\frac{v}{V_{\text{in}}},\ \ \Theta=\frac{T-T_0}{T_{\text{hs}}-T_0},$$

$$\xi=\frac{C-C_0}{C_{\text{cs}}-C_0},\ \ \Psi=\frac{\psi}{\psi_0},\ \ \Omega=\frac{\omega}{\omega_0},$$

при $\psi_0=V_{\text{in}}L_x,\quad \omega_0=V_{\text{in}}/L_x$;

где x, y – координаты декартовой системы координат; X, Y – безразмерные координаты, соответствующие координатам x, y; t – время; t_0 – масштаб времени; τ – безразмерное время; u, v – составляющие скорости в проекции на оси x, y соответственно; U, V – безразмерные скорости, соответствующие скоростям u, v; V_{in} – масштаб скорости (скорость потока на входе в полость); Θ – безразмерная температура; T_0 – начальная температура в области решения; T_{hs} – температура на источнике тепловыделения; ξ – безразмерная концентрация примеси; C_0 – начальная концентрация в области решения; C_{cs} – концентрация примеси на источнике примеси; ψ – функция тока; $C_{\text{in}}=C_{\text{cs}}$ – концентрация примеси на входе в полость; ψ_0 – масштаб функции тока; Ψ – безразмерный аналог функции тока; ω – вихрь скорости; ω_0 – масштаб вектора вихря; Ω – безразмерный аналог вектора вихря.

Безразмерные уравнения сопряженного тепломассопереноса:

- для газа (*5* на рис. 1)

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}+\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\Omega}{\partial X}-\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\Omega}{\partial Y}=\frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}\right)+\frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}+\text{Br}\frac{\partial\xi}{\partial X}\right), \tag{1}$$

$$\Delta\Psi = -\Omega,$$
(2)
$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\Theta}{\partial X}-\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\Theta}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}\right),$$
(3)
$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau}+\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\xi}{\partial X}-\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\xi}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Sc}}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial Y^2}\right), \qquad (4)$$

- для элементов твердого материала

$$\frac{1}{\mathrm{Fo}_i}\frac{\partial\Theta_i}{\partial\tau}=\Delta\Theta_i, \qquad i=\overline{1,4}. \qquad (5)$$

Здесь $\mathrm{Re}=V_{\mathrm{in}}L_x/\nu$ – число Рейнольдса; $\mathrm{Gr}=g_y\beta\Delta TL_x^3/\nu^2$ – число Грасгофа; β – температурный коэффициент объемного расширения; g_y – составляющая ускорения силы тяжести в проекции на ось y $(g_x=0)$; ν – кинематический коэффициент вязкости; $\mathrm{Br}=(\beta_c\Delta C)/(\beta\Delta T)$ – параметрический критерий; $\beta_c=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial C}\right)_{p,T}$ – диффузионный коэффициент объемного расширения; $\mathrm{Pr}=\nu/a$ – число Прандтля; $\mathrm{Sc}=\nu/D$ – число Шмидта; D – коэффициент диффузии; $\mathrm{Fo}_i=a_it_0/L_x^2$ – число Фурье, соответствующее i-ой подобласти; a_i – коэффициент температуропроводности i-ой подобласти; $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}$ – оператор Лапласа.

Начальные и граничные условия для сформулированной задачи (1)–(5) имеют вид:

Начальные условия:

$$\Psi(X,Y,0)=0,\ \ \Omega(X,Y,0)=0,$$

$\Theta(X,Y,0)=\xi(X,Y,0)=0$, на источнике тепловыделения в течение всего процесса $\Theta=1$, во входном отверстии и на источнике примеси $\xi=1$.

Граничные условия:

- на границе X = 0 реализованы условия, учитывающие теплообмен с внешней средой за счет конвекции и излучения

$$\frac{\partial\Theta_i(X,Y,\tau)}{\partial X}=\mathrm{Bi}_i\cdot\Theta_i(X,Y,\tau)-\mathrm{Bi}_i\cdot\Theta_{\mathrm{e}}+Q_i, \qquad (6)$$

при $Q_i=\mathrm{N}_i\cdot\left[\left(\Theta_i(X,Y,\tau)+\frac{T_0}{T_{\mathrm{hs}}-T_0}\right)^4-\left(\frac{T_{\mathrm{e}}}{T_{\mathrm{hs}}-T_0}\right)^4\right]$;

где $i=1,\ 3,\ 4,\ 5$ в соответствии с рис. 1;

- на остальных внешних границах заданы условия теплоизоляции

$$\frac{\partial\Theta_i(X,Y,\tau)}{\partial X^k}=0,\ \text{где}\ \ X^1\equiv X,\ X^2\equiv Y; \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 5;$$

- на всех участках области решение, где происходит сопряжение материалов с различными теплофизическими характеристиками, выполнялись условия 4-го рода:

$$\Theta_i = \Theta_j, \quad \frac{\partial \Theta_i}{\partial X^k} = \lambda_{j,i} \frac{\partial \Theta_j}{\partial X^k}, \quad i, j = \overline{1,\ 5}, \ \ i \neq j, \ \ k = 1,\ 2;$$

- на входе в полость (зона *8*):

для уравнения энергии рассматриваются граничные условия 3 рода (6),
для функции тока, завихренности и концентрации:

$$\Psi = Y - \frac{h}{L_x}, \ \ \Omega = 0, \ \ \xi = 1;$$

- на выходе из полости (зона *9*):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} = \frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0;$$

- на границах твердого материала и газа, параллельных координатным осям $0X(0Y)$, кроме $Y = \dfrac{H}{L_x}$:

$$\Psi = 0, \ \ \frac{\partial \Psi}{\partial Y(\partial X)} = 0, \ \ \frac{\partial \xi}{\partial Y(\partial X)} = 0, \ \ \Theta_i = \Theta_5, \ \ \frac{\partial \Theta_i}{\partial Y(\partial X)} = \lambda_{5,i} \frac{\partial \Theta_5}{\partial Y(\partial X)}, \ \ i = 1,\ 2,\ 4;$$

- на границе $Y = \dfrac{H}{L_x}$:

$$\Psi = \frac{H - h}{L_x}, \ \ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \ \ \frac{\partial \xi}{\partial Y} = 0, \ \ \Theta_3 = \Theta_5, \ \ \frac{\partial \Theta_3}{\partial Y} = \lambda_{5,3} \frac{\partial \Theta_5}{\partial Y};$$

здесь $\mathrm{Bi}_i = \alpha L_x / \lambda_i$ – число Био, соответствующее *i*-ой подобласти; α – коэффициент теплообмена между внешней средой и рассматриваемой областью решения; T_e – температура окружающей среды; Θ_e – безразмерная температура окружающей среды; $\mathrm{N}_i = \varepsilon \sigma L_x (\Delta T)^3 / \lambda_i$ – число Старка, соответствующее *i*-ой подобласти; ε – приведенная степень черноты; σ – постоянная Стефана-Больцмана; $\lambda_{ij} = \lambda_i / \lambda_j$ – относительный коэффициент теплопроводности; λ_i – коэффициент теплопроводности *i*-ой подобласти.

Метод решения

Задача (1)–(5) с соответствующими граничными и начальными условиями решена методом конечных разностей [9–11] на равномерной сетке (200*200). Для аппроксимации конвективных слагаемых в эволюционных уравнениях применялась монотонная схема А.А. Самарского [9]. Дискретизация диффузионных членов проводилась с использованием центральных конечных разностей. Значение вихря скорости на границах определялось по формуле Вудса [11–13]. Для численного решения уравнений (1)–(5) применялась локально одномерная схема А.А. Самарского. В этой схеме решение двумерной системы сводится к последовательному решению одномерных систем методом прогонки [11] как систем разностных уравнений с трехдиагональными матрицами. Для разрешения нелинейного граничного условия III рода использовался метод простой итерации.

Представленный метод решения был протестирован на модельной задаче сопряженного теплопереноса в замкнутой области [14, 15]. Сравнение проводилось по средним числам Нуссельта (табл.) на границе раздела газовой полости и твердой стенки.

Таблица. Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Грасгофа и от относительного коэффициента теплопроводности

Gr	λ_s/λ_f	[14]	[15]	Present
10^3	1	0.877	0.87	0.872
	5		1.02	1.023
	10		1.04	1.046
10^5	1	2.082	2.08	2.116
	5		3.42	3.421
	10		3.72	3.781
10^6	1	2.843	2.87	3.002
	5		5.89	6.306
	10		6.81	6.935

Результаты, представленные в таблице, наглядно показывают, что используемый метод приводит к достаточно хорошему согласованию с работами других авторов.

Обсуждение результатов

Численные исследования краевой задачи (1)–(5) с соответствующими начальными и граничными условиями проведены при следующих значениях безразмерных комплексов: $10^4 \le \mathrm{Gr} \le 10^7$, $10^2 \le \mathrm{Re} \le 10^3$, $\mathrm{Pr} = \mathrm{Sc} = 0.7$, $\mathrm{Br} = -5,\ 1,\ 5$. Безразмерные определяющие температуры и концентрации имели следующие значения: $\Theta_e = -1$, $\Theta_{hs} = 1$, $\Theta_0 = \xi_0 = 0$, $\xi_{in} = 1$. Основное внимание уделялось анализу влияния чисел Грасгофа (Gr) и Рейнольдса (Re), характеризующих, соответственно, интенсивность источника тепловыделения и внешнее вынужденное течение (или вентиляцию), а также параметрического критерия (Br), описывающего интенсивность источника примеси, на распределения основных характеристик исследуемого процесса.

На рис. 2 представлены локальные термогидродинамические и диффузионные характеристики (линии тока, изотермы и линии постоянной концентрации), соответствующие режимам конвективного теплопереноса $\mathrm{Gr} = 10^5,\ 10^6,\ 10^7$.

В газовой полости (рис. 2,*а*) в режиме $\mathrm{Gr} = 10^5$ формируется основная конвективная ячейка, появление которой объясняется наличием источника тепловыделения. Между двумя элементами твердого материала (*4* на рис. 1) формируются циркуляционные течения, способствующие переносу примеси и энергии в этой зоне. Поле концентрации неизменно связано с внешним вынужденным течением. Перенос пассивной примеси осуществляется как через входное отверстие (*8* на рис. 1), так и от источника примеси (*7* на рис. 1). Распределение изотерм характеризует охлаждение газовой полости, обусловленное достаточно большой скоростью вынужденного течения. Интересным является направление распространения волны пониженной температуры в элементах твердого материала (*4* на рис. 1) – охлаждение этих элементов происходит не за счет теплообмена на границе $X = 0$, а за счет интенсивной вынужденной конвекции.

Увеличение числа Грасгофа в 10 раз приводит к росту скорости в центральной конвективной ячейке, а также к увеличению масштабов области, занимаемой этим вихрем. Последнее приводит к своеобразному запиранию трубки тока внешнего вынужденного течения. При этом происходит уменьшение масштабов зоны диффузии примеси вглубь газовой полости (например, линия постоянной концентрации, соответствующая $\xi = 0.2$, охватывает меньшую площадь, чем в случае $\mathrm{Gr} = 10^5$). Увеличение роли выталкивающей силы приводит к изменению интенсивности теплового факела над источником тепловыделения, что сказывается на увеличении средней температуры в газовой полости.

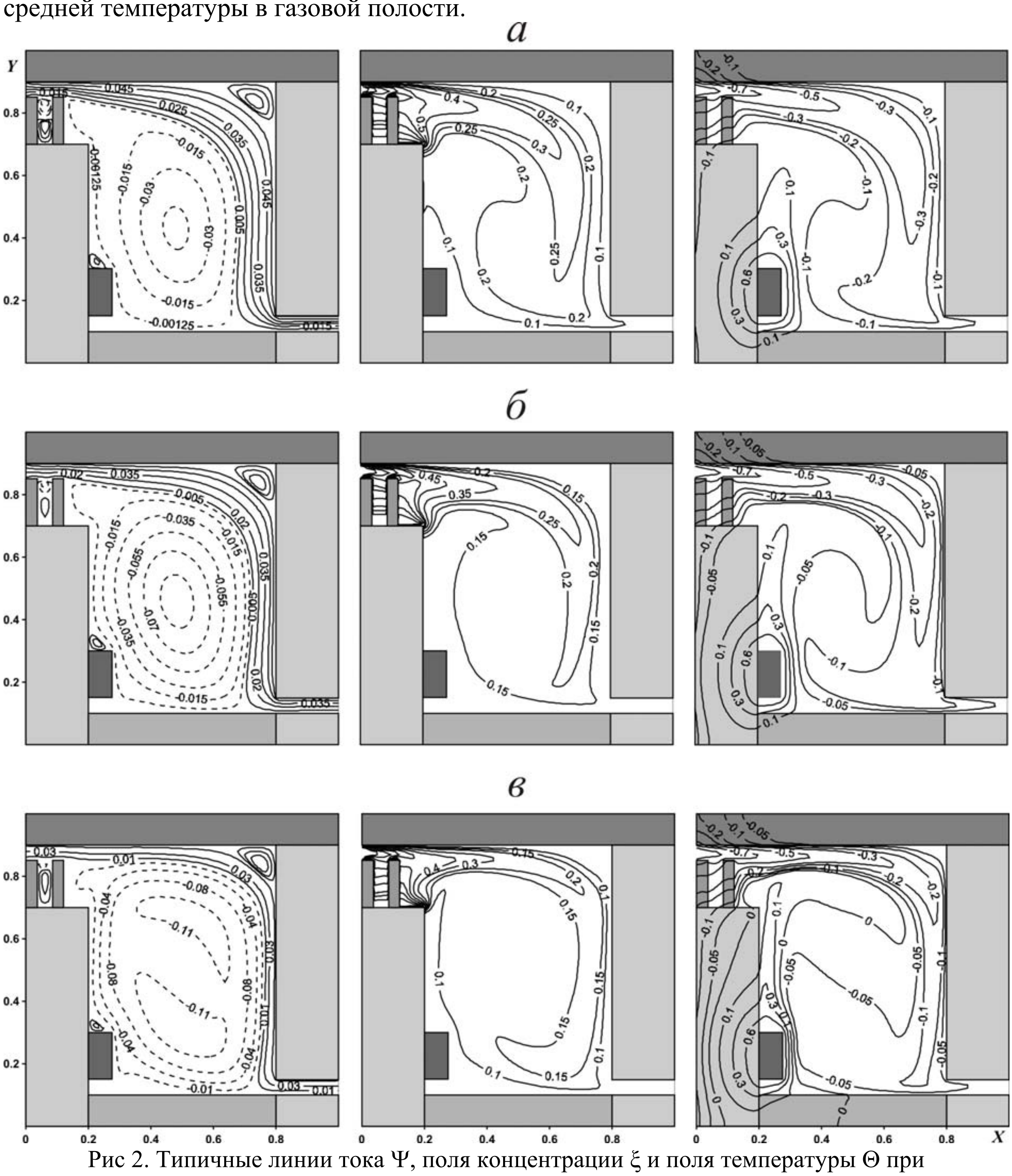

Рис 2. Типичные линии тока Ψ, поля концентрации ξ и поля температуры Θ при $\mathrm{Re} = 600,\ \mathrm{Br} = 1,\ \tau = 100$: $\mathrm{Gr} = 10^5$ – *а*, $\mathrm{Gr} = 10^6$ – *б*, $\mathrm{Gr} = 10^7$ – *в*

Дальнейший рост числа Gr приводит к существенной модификации центральной конвективной ячейка – наблюдается распад ядра этого вихря. Скорость газовых масс в центральной ячейки также возрастает. Увеличение размеров этого вихря приводит к существенному доминированию режима естественной конвекции над режимом вынужденной конвекции, что наблюдается как в запирании трубки тока вынужденного течения, так и в сокращении площадей зон распространения примеси и пониженной температуры.

В дополнение к вышесказанному получены зависимости среднего числа Нуссельта на характерных границах раздела газ–твердое тело от числа Грасгофа и параметрического критерия Br:

$$\mathrm{Nu}_{1\mathrm{avg}} = \frac{1}{0.75}\int\limits_{0.15}^{0.9}\left|\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right|_{X=0.8} dY\,,\ \mathrm{Nu}_{2\mathrm{avg}} = \frac{1}{0.8}\int\limits_{0.2}^{1.0}\left|\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right|_{Y=0.1} dX\,,\ \mathrm{Nu}_{3\mathrm{avg}} = \frac{1}{0.8}\int\limits_{0.0}^{0.8}\left|\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right|_{Y=0.9} dX\,.$$

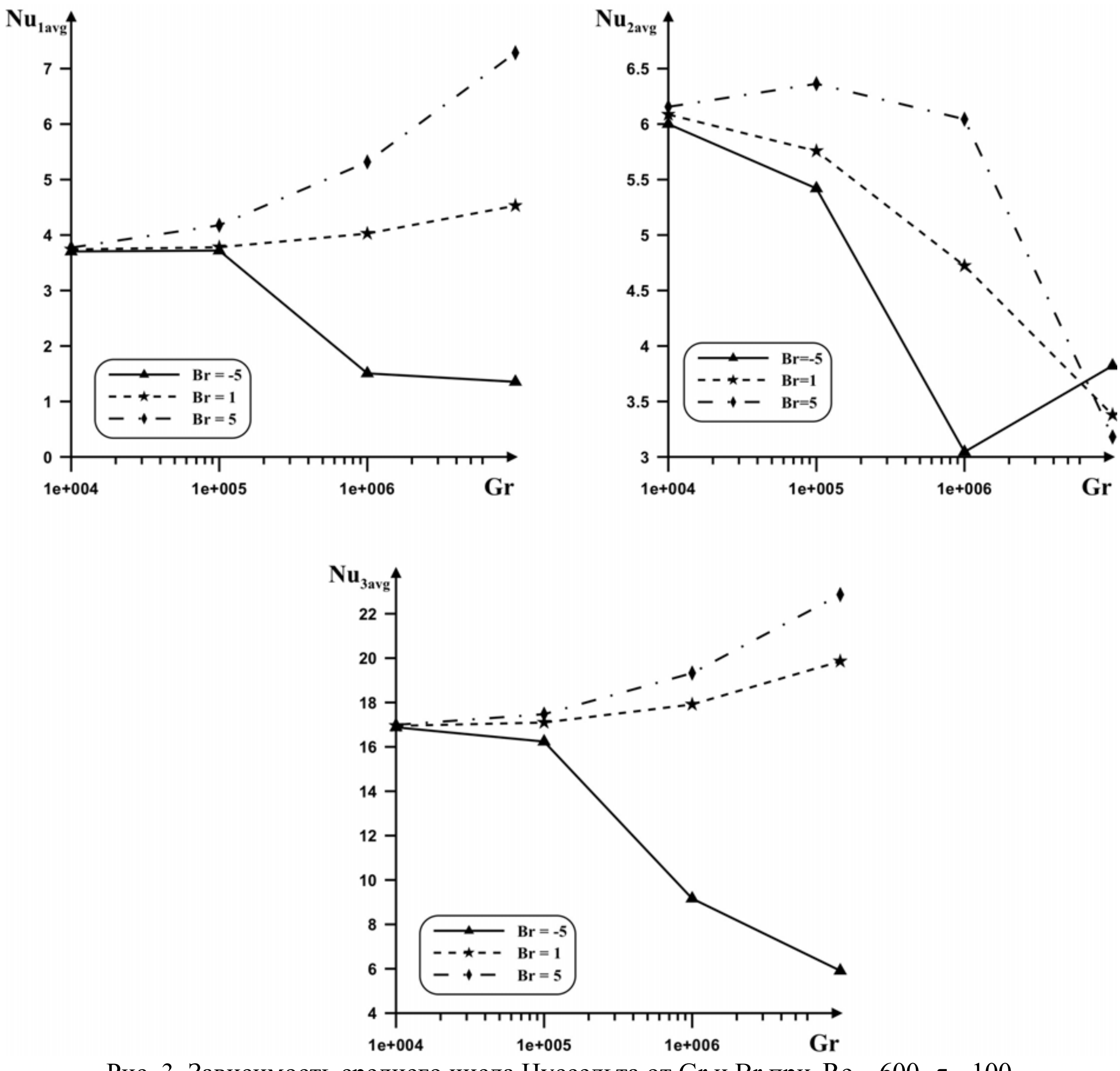

Рис. 3. Зависимость среднего числа Нуссельта от Gr и Br при $\mathrm{Re} = 600,\ \tau = 100$

Уменьшение обобщенного коэффициента теплообмена связано с уменьшением градиента температуры на границе. Например, на границе $Y = 0.1$ преобладают газовые массы от нисходящих потоков, температура которых незначительно отличается от температуры твердого материала. Рис. 3 также показывает существенное влияние диффузионных эффектов на интенсификацию теплопереноса.

На рис. 4 представлено влияние числа Рейнольдса на поля скорости, температуры и концентрации в режиме соответствующем $\mathrm{Gr} = 10^5$, $\mathrm{Br} = 1$. Увеличение скорости внешнего вынужденного течения в 3 раза (от $\mathrm{Re} = 300$ до $\mathrm{Re} = 900$) приводит к росту масштабов вторичных циркуляционных течений, расположенных в угловых зонах газовой полости. Происходит также более интенсивное проникновение вглубь полости примеси и пониженной температуры. Наблюдается некоторое уменьшение трубки тока вынужденного течения и незначительное увеличение скорости в ядре центральной конвективной ячейки. Тепловой факел деформируется вследствие сопряжения с фронтом пониженной температуры.

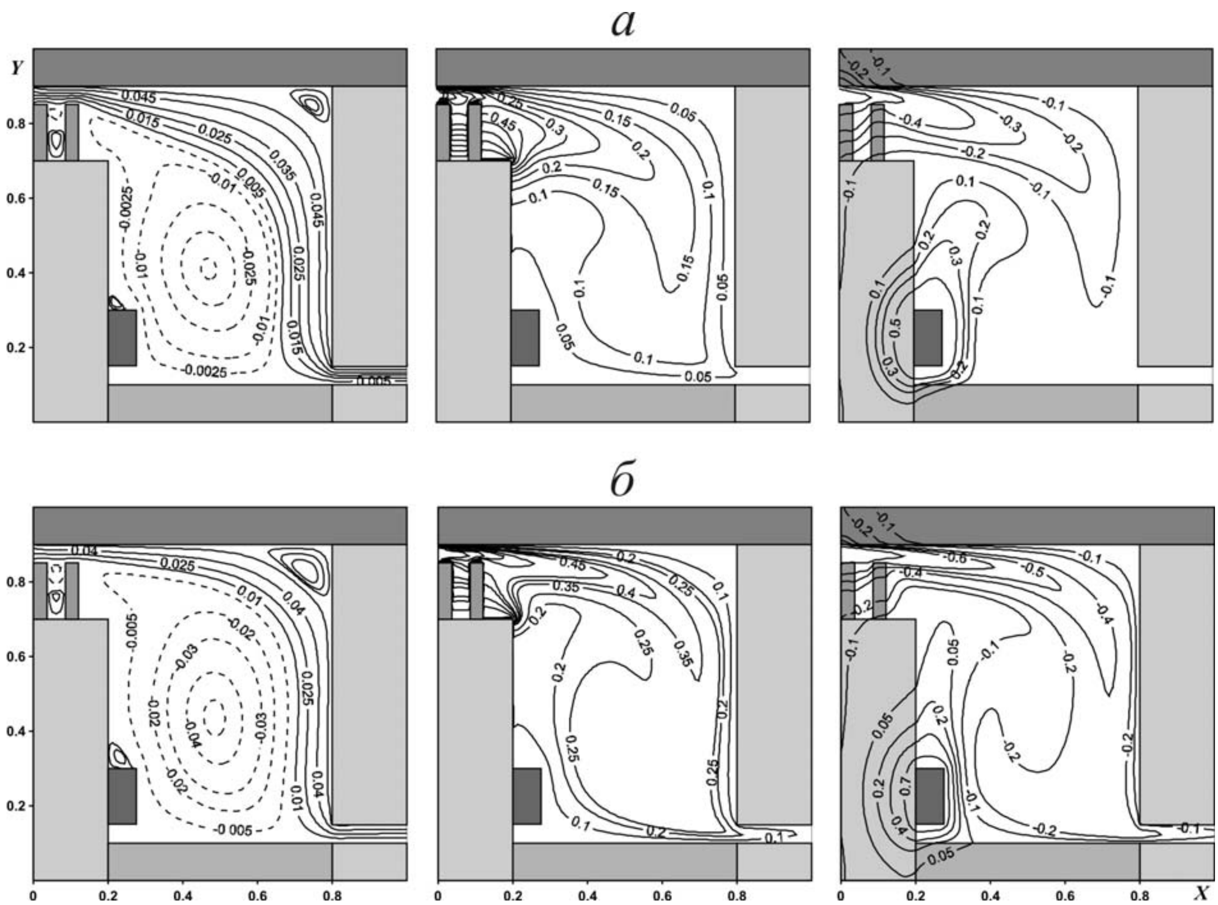

Рис 4. Типичные линии тока Ψ, поля концентрации ξ и поля температуры Θ при $\mathrm{Gr} = 10^5$, $\mathrm{Br} = 1$, $\tau = 100$: $\mathrm{Re} = 300$ – *а*, $\mathrm{Re} = 900$ – *б*

В случае же $\mathrm{Gr} = 10^5$, $\mathrm{Br} = -5$ при $\mathrm{Re} = 300$ в газовой полости формируется достаточно интересный режим течения. Внешнее вынужденное течение прижимается к внутренней границе левой стенки и, образуя нисходящий поток, спускается у источника тепловыделения. При этом в полости образуется конвективная ячейка над вынужденным течением. Поля концентрации и температуры формируются в соответствии с полем скорости – примесь и фронт пониженной температуры распространяются также вдоль левой стенки к источнику тепла. При этом фронт пониженной температуры деформирует тепловой факел от источника тепловыделения, изменяя направление распространения тепловой энергии от нагревателя. Увеличение числа Рейнольдса приводит к более устойчивому режиму течения, который характеризуется наличием конвективной ячейки под трубкой тока вынужденного течения.

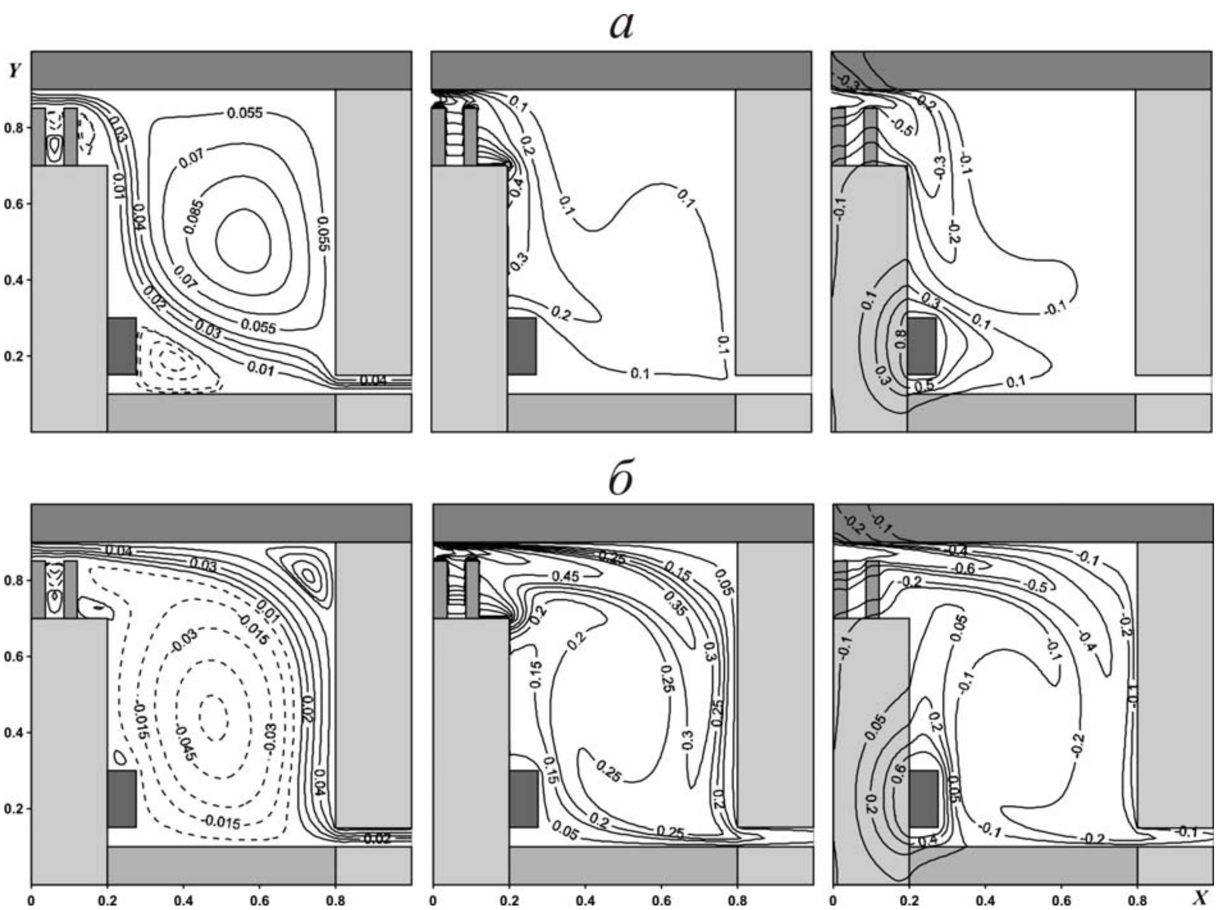

Рис 5. Типичные линии тока Ψ, поля концентрации ξ и поля температуры Θ при $\mathrm{Gr} = 10^5,\ \mathrm{Br} = -5,\ \tau = 100:\ \mathrm{Re} = 300\ -a,\ \mathrm{Re} = 900\ -б$

Заключение

Проведено математическое моделирование сопряженной конвекции в прямоугольной области при наличии внутреннего массопереноса в условиях конвективно-радиационного теплообмена на одной из внешних границ. Результаты получены для достаточно широкого диапазона изменения определяющих комплексов $10^4 \le \mathrm{Gr} \le 10^7$, $10^2 \le \mathrm{Re} \le 10^3$, $\mathrm{Pr} = \mathrm{Sc} = 0.7$, $\mathrm{Br} = -5,\ 1,\ 5$. Показано существенное влияние внутреннего массопереноса как на локальные характеристики процесса переноса тепла, так и на структуру интегрального коэффициента теплообмена. Установлены масштабы влияния выталкивающей силы на формирование определенных режимов течения. Определена роль источников тепла и примеси в процессе сопряженного тепломассопереноса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Томской области (№ 05-02-98006 конкурс р_обь_а).

Литература

[1] Дульнев Г.Н. Тепло- и массообмен в радиоэлектронной аппаратуре. М.: Высшая школа, 1984. 247 с.

[2] Варламов Р.Г. Краткий справочник конструктора радиоэлектронной аппаратуры. М.: Советское радио, 1973. 856 с.

[3] Qi-Hong Deng, Guoqiang Zhang Indoor air environment: more structures to see? Building and Environment. 2004. Vol. 39. pp. 1417–1425.
[4] Qi-Hong Deng, Jiemin Zhou, Chi Mei, Yong-Ming Shen Fluid, heat and contaminant transport structures of laminar double-diffusive mixed convection in a two-dimensional ventilated enclosure. Int. J. Heat and Mass Transfer. 2004. Vol. 47. pp 5257–5269.
[5] Костылев И.И. Подогрев груза на танкерах. Л., 1976. 104 с.
[6] Джалурия Й. Естественная конвекция: Тепло- и массообмен. М.: Мир, 1983. 400 с.
[7] Bejan A. Convection heat transfer, Wiley, New York, 2004, 728 p.
[8] Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
[9] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
[10] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. 620 с.
[11] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
[12] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
[13] Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
[14] Liaqat A., Baytas A.C. Conjugate natural convection in a square enclosure containing volumetric sources. Int. J. Heat Mass Transfer. 2001. Vol. 44. pp. 3273-3280.
[15] Kaminski D.A., Prakash C. Conjugate natural convection in a square enclosure effect of conduction on one of the vertical walls. Int. J. Heat Mass Transfer. 1986. Vol. 29. pp. 1979-1988.