

УДК 536.2:621.891

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕИДЕАЛЬНОГО ТЕПЛООВОГО КОНТАКТА ТЕЛ ТРЕНИЯ**

Н. С. Беляков, А. П. Носко

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Контактная информация:

Н. С. Беляков

119333, Россия, Москва, Университетский проспект, д. 6, корпус 3, кв. 39.

nbelyakov@list.ru

А. П. Носко

nosko_a@mail.ru

Аннотация

В работе получены аналитические решения задач нестационарной теплопроводности при неидеальном фрикционном контакте двух твердых изотропных полуограниченных тел для случаев: система двух полупространств, система двух неограниченных цилиндрических тел, система двух полупространств при наличии объемного источника тепловыделения. Предложена классификация тепловых контактных условий для фрикционного взаимодействия в системе двух полупространств.

Введение. Задачи определения температурных полей при фрикционном контакте тел занимают важное место как в математической теории теплопроводности, так и в трибологии. Зависимости в виде аналитических решений тепловых задач трения с учетом различных контактных условий, представляют собой научный и практический интерес. Они могут использоваться для получения асимптотических оценок, тестирования численных методов, проведения параметрического анализа, решения задач оптимизации.

Целью настоящей работы является нахождение аналитических решений задач нестационарной теплопроводности при неидеальном фрикционном контакте двух твердых изотропных полуограниченных тел.

1. Контактное условие. Современная технология измерения температуры на фрикционном контакте не позволяет определить температуру на фактических участках контакта. Расположение этих участков при трении постоянно изменяется, а тепловыделение на них происходит в микрообъемах за очень короткие промежутки времени.

Для описания тепловых процессов при фрикционном взаимодействии предложена модель неидеального теплового контакта [1], которая допускает неравенство температур тел на контактных поверхностях:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_S &= \alpha q - \beta (T_1 - T_2) \Big|_S, \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_S &= (1 - \alpha)q + \beta (T_1 - T_2) \Big|_S, \end{aligned} \quad (1)$$

где T_i – температуры тел; λ_i – коэффициенты теплопроводности тел; S – поверхность трения; n – нормаль к поверхности трения S ; q – удельная мощность тепловыделения на фрикционном контакте; α – коэффициент распределения энергии трения [2]; β – тепловая проводимость контакта.

Контактное условие (1) позволяет определять температуру на участках поверхности трения, размеры которых значительно превышают размеры фактических участков контакта. Эту температуру можно определить не только расчетным путем, но и экспериментально, и тем самым установить связь между теорией и экспериментом.

Частным случаем контактного условия (1) при $\beta \rightarrow \infty$ является условие идеального теплового контакта:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_S + \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_S &= q, \\ T_1 \Big|_S &= T_2 \Big|_S. \end{aligned}$$

Если тепловая проводимость контакта $\beta \rightarrow 0$, то в этом случае получаем модель контакта с распределением тепловых потоков [3]:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_S &= \alpha_{\text{ТП}} q, \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_S &= (1 - \alpha_{\text{ТП}})q, \end{aligned}$$

где $\alpha_{\text{ТП}}$ - коэффициент распределения тепловых потоков.

Для описания тепловых процессов при трении также используется следующая модель неидеального контакта [4]:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_S + \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_S &= q, \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_S + \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_S &= 2\beta (T_1 - T_2) \Big|_S. \end{aligned} \quad (2)$$

Контактное условие (2) является частным случаем условия (1) при $\alpha = 1/2$, поэтому в рассматриваемых далее задачах используется контактное условие (1).

2. Система двух полупространств. Одномерная задача математической теории теплопроводности для неидеального контакта при трении двух полуограниченных твердых изотропных тел (рис. 1) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad x < 0, \quad t > 0; \\ T_1|_{t=0} &= 0 = T_2|_{t=0}; \\ \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow +\infty} &= 0 = \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow -\infty}; \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha q(t) - \beta(T_1 - T_2) \Big|_{x=0}; \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0} &= (1 - \alpha)q(t) + \beta(T_1 - T_2) \Big|_{x=0}, \end{aligned} \tag{3}$$

где x – пространственная координата; t – время; a_i – температуропроводности тел.

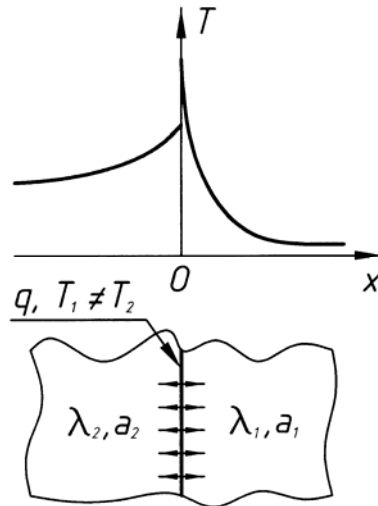


Рис. 1. Фрикционный контакт в системе двух полупространств.

Предполагая, что функции $T_i(x, t)$ и $q(t)$ являются оригиналами интегрального преобразования Лапласа [5], решение задачи (3) в изображениях $U_i(x, s) = L[T_i(x, t)]$ представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_i(x, s) &= Q(s)\Phi_i(x, s), \\ \Phi_1 &= \frac{\alpha\sqrt{a_1}}{\lambda_1} \frac{\sqrt{s} + \frac{\beta\sqrt{a_2}}{\alpha\lambda_2}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + \beta d)} \exp\left\{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}x\right\}, \\ \Phi_2 &= \frac{(1-\alpha)\sqrt{a_2}}{\lambda_2} \frac{\sqrt{s} + \frac{\beta\sqrt{a_2}}{(1-\alpha)\lambda_1}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + \beta d)} \exp\left\{\sqrt{\frac{s}{a_2}}x\right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $Q(s) = L[q(t)]$; $d = \frac{\sqrt{a_1}}{\lambda_1} + \frac{\sqrt{a_2}}{\lambda_2}$.

Переход от изображений (4) к оригиналам $\varphi_i(x, \tau) = L^{-1}[\Phi_i(x, s)]$ можно осуществить, используя таблицы «оригинал – изображение» [6]. Согласно теореме о свертках [6, 7] решение задачи (3) можно представить в виде:

$$T_1(x, t) = \frac{\alpha\sqrt{a_1}}{\lambda_1} \int_0^t q(t-\tau) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a_1\tau}\right\} + \beta \left(\frac{\sqrt{a_2}}{\alpha\lambda_2} - d \right) \exp\left\{\beta^2 d^2 \tau + \frac{\beta d}{\sqrt{a_1}} x\right\} \operatorname{erfc}\left\{\beta d\sqrt{\tau} + \frac{x}{2\sqrt{a_1\tau}}\right\} \right\} d\tau, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (5)$$

$$T_2(x, t) = \frac{(1-\alpha)\sqrt{a_2}}{\lambda_2} \int_0^t q(t-\tau) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a_2\tau}\right\} + \beta \left(\frac{\sqrt{a_1}}{(1-\alpha)\lambda_1} - d \right) \exp\left\{\beta^2 d^2 \tau - \frac{\beta d}{\sqrt{a_2}} x\right\} \operatorname{erfc}\left\{\beta d\sqrt{\tau} - \frac{x}{2\sqrt{a_2\tau}}\right\} \right\} d\tau, \quad x < 0, \quad t > 0,$$

где $\operatorname{erfc}(z)$ – дополнительная функция ошибок Гаусса [6].

При $\beta \rightarrow \infty$ решение (5) вырождается в решение для идеального теплового контакта:

$$T_1^{\text{ид}}(x, t) = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{\sqrt{\pi}(\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1})} \int_0^t \frac{q(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a_1\tau}\right\} d\tau, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (6)$$

$$T_2^{\text{ид}}(x, t) = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{\sqrt{\pi}(\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1})} \int_0^t \frac{q(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a_2\tau}\right\} d\tau, \quad x < 0, \quad t > 0,$$

которое для произвольного закона тепловыделения $q(t)$ эквивалентно решению, приведенному в работе [8], и для постоянного закона – решению, приведенному в [6].

Если тепловая проводимость контакта $\beta \rightarrow 0$, то получим решение тепловой задачи для модели контакта с распределением тепловых потоков. В этом случае связанная для двух тел тепловая задача распадается на две независимые задачи для каждого тела, а решение принимает вид:

$$T_1^{\text{тп}}(x, t) = \frac{\alpha\sqrt{a_1}}{\sqrt{\pi}\lambda_1} \int_0^t \frac{q(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a_1\tau}\right\} d\tau, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (7)$$

$$T_2^{\text{тп}}(x, t) = \frac{(1-\alpha)\sqrt{a_2}}{\sqrt{\pi}\lambda_2} \int_0^t \frac{q(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a_2\tau}\right\} d\tau, \quad x < 0, \quad t > 0.$$

Корректность полученного решения (7), как и в случае модели идеального контакта, подтверждается работами [6, 8].

Если в решении для модели контакта с распределением тепловых потоков (7) приравнять температуры тел в месте контакта, т. е. положить $T_1^{\text{тп}}(0, t) = T_2^{\text{тп}}(0, t)$, то коэффициент α определяется равенством:

$$\alpha^{\text{ид}} = \left(1 + \frac{\lambda_2 \sqrt{a_1}}{\lambda_1 \sqrt{a_2}} \right)^{-1}. \quad (8)$$

Коэффициент распределения тепловых потоков α в виде (8) получен в работах [6, 9]. При $\alpha = \alpha^{\text{ид}}$ модель идеального контакта и модель контакта с распределением тепловых потоков эквивалентны.

В решение для неидеального контакта (5) подставим коэффициент распределения энергии трения, который определяется равенством (8). Тогда решение (5) выродится в решение для идеального контакта (6).

Таким образом, если энергия трения распределяется между контактирующими телами согласно равенству (8), то в этом случае температуры тел в месте контакта одинаковы и решение (5) задачи (3) не зависит от тепловой проводимости контакта β .

Согласно полученному результату можно предложить классификацию контактных условий для системы двух полупространств, представленную на рис. 2.

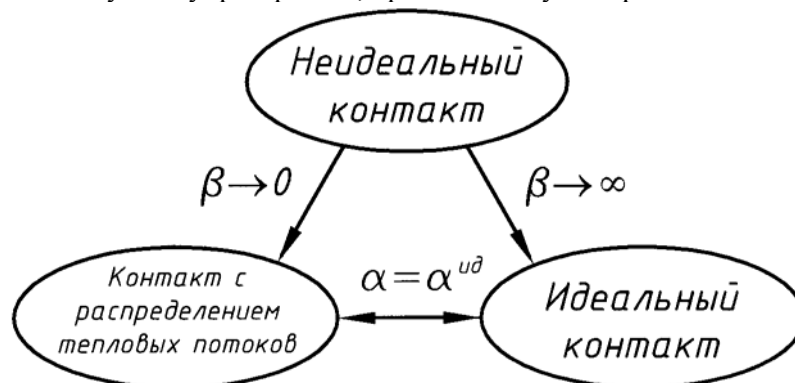


Рис. 2. Классификация контактных условий для системы двух полупространств.

Численный пример. Два тела трения имеют одинаковые теплофизические свойства: $\lambda_1 = \lambda_2 = 50$ Вт/(м⁰С) и $a_1 = a_2 = 2 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Однако энергия трения распределяется между ними таким образом, что $\alpha = 0,4$. Тепловая проводимость контакта $\beta = 500$ Вт/(м² °С). Удельная мощность тепловыделения постоянна. Начальные температуры тел равны нулю. Необходимо определить, во сколько раз контактная температура первого тела ниже температуры на контакте второго тела после их взаимодействия в течение $t_0 = 50$ с. Проанализировать влияние тепловой проводимости контакта на решение задачи.

Значения теплофизических свойств соответствуют стали / чугуна. Значение $\alpha_{эТ} = 0,4 \neq 1/2$ можно объяснить, например, различной чистотой обработки поверхностей трения тел.

Обратим внимание на то, что в условии задачи не задана удельная мощность тепловыделения. Это связано с тем, что интерес представляют не значения контактных температур, а их отношение.

Задачу можно решить с помощью формулы (5), которую можно найти численно или аналитически упростить для постоянного закона тепловыделения. На рис. 3 представлены кривые изменения отношения контактных температур тел во времени.

Из рис. 3 видно, что максимальная разница контактных температур возникает в начальный момент времени взаимодействия тел при $t \rightarrow +0$.

При наличии тепловой проводимости разница контактных температур уменьшается с течением времени, асимптотически приближаясь к нулю. Чем больше значение β , тем быстрее происходит выравнивание температур в месте контакта.

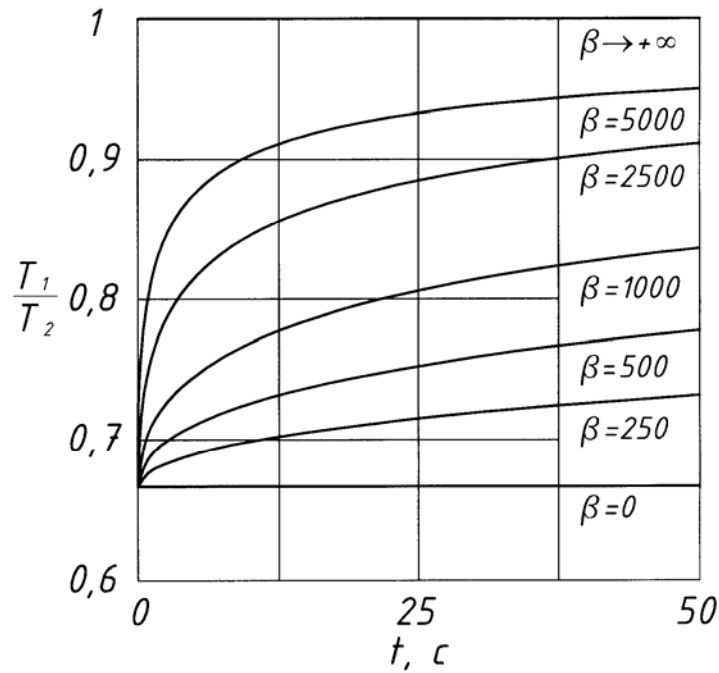


Рис. 3. Влияние тепловой проводимости на отношение контактных температур.

Для заданной тепловой проводимости $\beta = 500$ в момент времени $t = t_0$ имеем $T_1(0, t_0)/T_2(0, t_0) = 0.78$ (рис. 3), т. е. контактная температура первого тела в 1,29 раза меньше температуры на контактной поверхности второго тела.

3. Система двух неограниченных цилиндрических тел. Рассмотрим осесимметричную задачу трения бесконечного цилиндрического твердого изотропного стержня и неограниченного твердого изотропного тела при неидеальном тепловом контакте (1).

С учетом принятых допущений математическая модель задачи может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \frac{a_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right], \quad 0 < r < R, \quad t > 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \frac{a_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right], \quad r > R, \quad t > 0; \\ T_1|_{t=0} &= 0 = T_2|_{t=0}; \\ \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow +0} &= 0 = \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow +\infty}; \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \alpha q(t) - \beta(T_1 - T_2) \Big|_{r=R}; \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=R} &= (1 - \alpha)q(t) + \beta(T_1 - T_2) \Big|_{r=R}, \end{aligned} \quad (9)$$

где r – пространственная координата; R – радиус цилиндрической поверхности контакта.

Решение задачи (9) в изображениях $U_i(r, s)$ интегрального преобразования Лапласа имеет вид:

$$\begin{aligned} U_i(x, s) &= Q(s)\Phi_i(x, s), \quad (10) \\ \Phi_1 &= \frac{I_0(p_1 r)}{D(s)} [\beta K_0(p_2 R) + \alpha \lambda_2 p_2 K_1(p_2 R)], \\ \Phi_2 &= \frac{K_0(p_2 r)}{D(s)} [(1 - \alpha)\lambda_1 p_1 I_1(p_1 R) + \beta I_0(p_1 R)], \end{aligned}$$

$D(s) = \lambda_1 \lambda_2 p_1 p_2 I_1(p_1 R) K_1(p_2 R) + \beta [\lambda_1 p_1 I_1(p_1 R) K_0(p_2 R) - \lambda_2 p_2 I_0(p_1 R) K_1(p_2 R)]$,
 где $I_\nu(\bullet)$, $K_\nu(\bullet)$ – модифицированные функции Бесселя индекса ν первого и второго рода соответственно; $p_i = \sqrt{s}/\sqrt{a_i}$.

В рассматриваемом случае переход от изображений $\Phi_i(r, s)$ к оригиналам $\varphi_i(r, \tau)$ с использованием таблиц «оригинал – изображение» не представляется возможным. Воспользуемся приемом, связанным с непосредственным вычислением интеграла Меллина в формуле обращения интегрального преобразования.

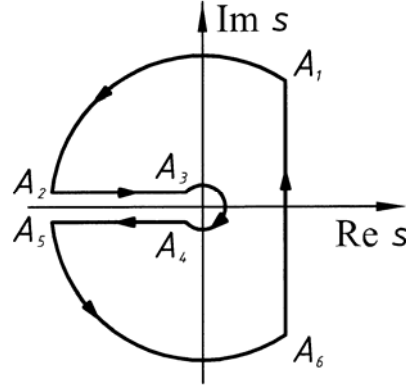


Рис. 4. Ориентированный контур в комплексной плоскости s для вычисления интеграла Меллина.

Изображения (10) имеют единственные особые точки $s=0$, являющиеся точками ветвления. Используя представленный на рис. 4 ориентированный контур

$$K = \overset{\curvearrowright}{A_1 A_2} \cup \overset{\rightarrow}{A_2 A_3} \cup \overset{\curvearrowright}{A_3 A_4} \cup \overset{\rightarrow}{A_4 A_5} \cup \overset{\curvearrowright}{A_5 A_6} \cup \overset{\rightarrow}{A_6 A_1},$$

где $\overset{\curvearrowright}{A_1 A_2}$, $\overset{\curvearrowright}{A_5 A_6}$ и $\overset{\curvearrowright}{A_3 A_4}$ – ориентированные дуги окружностей с центрами в начале координат, а также опираясь на известные представления [7, 10] модифицированных функций Бесселя $I_\nu(\bullet)$ и $K_\nu(\bullet)$ через функции Бесселя $J_\nu(\bullet)$ и $Y_\nu(\bullet)$ индекса ν первого и второго рода соответственно, получаем следующий результат:

$$\varphi_1(r, \tau) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\{-s^2 \tau\} \left\{ \frac{A(s) \left(\beta Y_0 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_2}} \right) + \alpha \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}} s Y_1 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_2}} \right) \right)}{A^2(s) + B^2(s)} - \frac{B(s) \left(\beta J_0 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_2}} \right) + \alpha \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}} s J_1 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_2}} \right) \right)}{A^2(s) + B^2(s)} \right\} J_0 \left(\frac{sr}{\sqrt{a_1}} \right) ds, \quad 0 < r < R, \quad t > 0;$$

$$\varphi_2(r, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\{-s^2 \tau\} \left\{ (1 - \alpha) \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} s J_1 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_1}} \right) - \beta J_0 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_1}} \right) \right\} \times \frac{J_0 \left(\frac{sr}{\sqrt{a_2}} \right) B(s) - Y_0 \left(\frac{sr}{\sqrt{a_2}} \right) A(s)}{A^2(s) + B^2(s)} ds, \quad r > R, \quad t > 0;$$

$$A(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 s}{\sqrt{a_1 a_2}} J_1 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_1}} \right) J_1 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_2}} \right) + \beta \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} J_1 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_1}} \right) J_0 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_2}} \right) - \beta \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}} J_0 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_1}} \right) J_1 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_2}} \right);$$

$$B(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 s}{\sqrt{a_1 a_2}} J_1 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_1}} \right) Y_1 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_2}} \right) + \beta \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} J_1 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_1}} \right) Y_0 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_2}} \right) - \beta \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}} J_0 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_1}} \right) Y_1 \left(\frac{sR}{\sqrt{a_2}} \right).$$

4. Система двух полупространств с объемным источником тепловыделения.

Согласно молекулярно-механической модели трения [3] взаимодействие шероховатостей тел можно представить в виде вязкого скольжения фактических участков контакта (адгезионная составляющая) и деформации шероховатостей (деформационная составляющая).

Тепловыделение на фрикционном контакте обусловлено с одной стороны разрушением адгезионных связей на фактических участках контакта, а с другой стороны – деформацией микрообъемов шероховатостей [11]. Вторая составляющая (деформационная) приводит к объемному тепловыделению в поверхностных слоях взаимодействующих тел.

Доказано [12], что деформационная составляющая тепловыделения составляет значительную часть от суммарной мощности трения и существенно влияет на распределение температур в поверхностном слое.

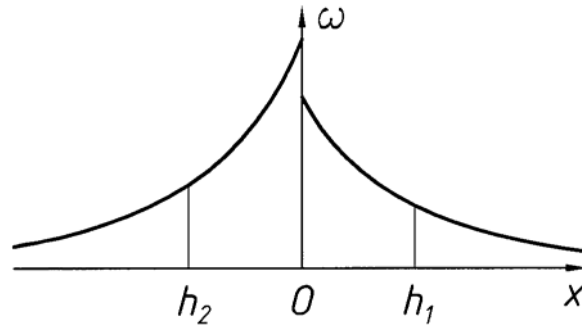


Рис. 5. Экспоненциальный закон распределения мощности трения в объеме поверхностных слоев.

Допустим, что мощность тепловыделения при трении распределяется в объеме поверхностного слоя контактирующих тел по экспоненциальному закону (рис. 5):

$$\omega_1(x) = \frac{\alpha}{h_1} \exp\left\{-\frac{x}{h_1}\right\}, \quad h_1 > 0, \quad x > 0;$$

$$\omega_2(x) = \frac{(1-\alpha)}{h_2} \exp\left\{\frac{x}{h_2}\right\}, \quad h_2 > 0, \quad x < 0,$$
(11)

где h_1 и h_2 - характерные для контактирующих тел и режима трения толщины поверхностных слоев тепловыделения.

С учетом (11) задача теплопроводности для системы двух полупространств принимает вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\alpha a_1}{\lambda_1 h_1} q(t) \exp\left\{-\frac{x}{h_1}\right\}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{(1-\alpha) a_2}{\lambda_2 h_2} q(t) \exp\left\{\frac{x}{h_2}\right\}, \quad x < 0, \quad t > 0;$$

$$T_1|_{t=0} = 0 = T_2|_{t=0};$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow +\infty} = 0 = \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow -\infty};$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \beta(T_1 - T_2) \Big|_{x=0}.$$
(12)

В изображениях интегрального преобразования Лапласа решение задачи (12) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U_i(x, s) &= Q(s)\Phi_i(x, s), \\
 \Phi_1 &= A \exp\left\{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}x\right\} + \frac{\alpha a_1 h_1}{\lambda_1 (sh_1^2 - a_1)} \exp\left\{-\frac{x}{h_1}\right\}, \\
 \Phi_2 &= B \exp\left\{\sqrt{\frac{s}{a_2}}x\right\} + \frac{(1-\alpha)a_2 h_2}{\lambda_2 (sh_2^2 - a_2)} \exp\left\{\frac{x}{h_2}\right\}, \\
 \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} &= \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}} \left(\sqrt{s} + \frac{\beta\sqrt{a_2}}{\lambda_2} \right) & \beta \\ \beta & \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} \left(\sqrt{s} + \frac{\beta\sqrt{a_1}}{\lambda_1} \right) \end{bmatrix} \times \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{a_1}{\lambda_1} \left(\frac{\beta(1-\alpha)}{h_2 (s - a_2/h_2^2)} - \frac{\alpha(\beta h_1 + \lambda_1)}{h_1^2 (s - a_1/h_1^2)} \right) \\ \frac{a_2}{\lambda_2} \left(\frac{\beta\alpha}{h_1 (s - a_1/h_1^2)} - \frac{(1-\alpha)(\beta h_2 + \lambda_2)}{h_2^2 (s - a_2/h_2^2)} \right) \end{bmatrix}, \\
 D(s) &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{a_1 a_2}} \sqrt{s} \left(\sqrt{s} + \beta \left(\frac{\sqrt{a_1}}{\lambda_1} + \frac{\sqrt{a_2}}{\lambda_2} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Используя таблицы «оригинал – изображение» [6], находим оригиналы $\varphi_i(x, \tau)$ для изображений $\Phi_i(x, s)$ в (13):

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x, \tau) &= \frac{a_1 \sqrt{a_1 a_2}}{\lambda_1^2 \lambda_2} \int_0^\tau \exp\left\{\beta^2 d^2 \xi + \frac{\beta dx}{\sqrt{a_1}}\right\} \operatorname{erfc}\left\{\beta d \sqrt{\xi} + \frac{x}{2\sqrt{a_1} \xi}\right\} \times \\
 &\quad \times \left[\frac{(1-\alpha)\beta\lambda_2}{\sqrt{a_2} h_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi(\tau-\xi)}} - \frac{\sqrt{a_2}}{h_2} \exp\left\{\frac{a_2(\tau-\xi)}{h_2^2}\right\} \operatorname{erfc}\left\{\frac{\sqrt{a_2}(\tau-\xi)}{h_2}\right\} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha\lambda_2(\beta h_1 + \lambda_1)}{\sqrt{a_2} h_1^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi(\tau-\xi)}} + \frac{\sqrt{a_1}}{h_1} \exp\left\{\frac{a_1(\tau-\xi)}{h_1^2}\right\} \operatorname{erf}\left\{\frac{\sqrt{a_1}(\tau-\xi)}{h_1}\right\} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha\beta\lambda_1}{h_1^2} \exp\left\{\frac{a_1(\tau-\xi)}{h_1^2}\right\} \right] d\xi + \frac{\alpha a_1}{\lambda_1 h_1} \exp\left\{\frac{a_1 \tau - h_1 x}{h_1^2}\right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, \tau) = & \frac{a_2 \sqrt{a_1 a_2}}{\lambda_1 \lambda_2^2} \int_0^\tau \exp \left\{ \beta^2 d^2 \xi - \frac{\beta dx}{\sqrt{a_2}} \right\} \operatorname{erfc} \left\{ \beta d \sqrt{\xi} - \frac{x}{2 \sqrt{a_2 \xi}} \right\} \times \\ & \times \left[\frac{\alpha \beta \lambda_1}{\sqrt{a_1} h_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi(\tau - \xi)}} - \frac{\sqrt{a_1}}{h_1} \exp \left\{ \frac{a_1(\tau - \xi)}{h_1^2} \right\} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\sqrt{a_1(\tau - \xi)}}{h_1} \right\} \right) - \right. \\ & - \frac{(1 - \alpha) \lambda_1 (\beta h_2 + \lambda_2)}{\sqrt{a_1} h_2^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi(\tau - \xi)}} + \frac{\sqrt{a_2}}{h_2} \exp \left\{ \frac{a_2(\tau - \xi)}{h_2^2} \right\} \operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{a_2(\tau - \xi)}}{h_2} \right\} \right) - \\ & \left. - \frac{(1 - \alpha) \beta \lambda_2}{h_2^2} \exp \left\{ \frac{a_2(\tau - \xi)}{h_2^2} \right\} \right] d\xi + \frac{(1 - \alpha) a_2}{\lambda_2 h_2} \exp \left\{ \frac{a_2 \tau + h_2 x}{h_2^2} \right\}. \end{aligned}$$

где $\operatorname{erf}(z)$ – функция ошибок Гаусса.

5. Выводы. Получены аналитические решения задач нестационарной теплопроводности при неидеальном фрикционном контакте двух твердых изотропных тел – системы двух полупространств, системы двух неограниченных цилиндрических тел и системы двух полупространств при наличии объемного источника тепловыделения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берри, Барбер.* Распределение тепла, выделяемого при трении – путь к изучению природы контактных явлений при скольжении // Проблемы трения. 1984. №3. С. 83–96.
2. *Протасов Б. В., Рамзаев А. П.* О электрическом моделировании распределения тепловых потоков при внешнем трении // Машиноведение. 1973. №5. С. 82–85.
3. *Крагельский И. В.* Трение и износ. М.: Машиностроение, 1968. 480 с.
4. *Термопружні контактні задачі в трибології: Навч. посібник / Д. В. Гриліцкий. К.: ІЗМН, 1996. 204 с.*
5. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
6. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
7. *Волков И. К., Канатников А. Н.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 228 с.
8. *Баум В. А., Котельников Ю. В.* Аналитическое решение задач по тепловым режимам тормозных пар // Известия Академии Наук Туркменской ССР. Серия физико-технических, химических и геологических наук. 1970. №3. С. 26–35.
9. *Charron F.* Publications scientifiques et techniques du secrétariat d'état a l'aviation, № 182, 1943.
10. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
11. *Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
12. *Протасов Б. В., Крагельский И. В.* О генерации тепла при внешнем трении // Трение и износ. 1981. №1. С. 5–11.