УДК 536.25

ЛАМИНАРНАЯ ТЕРМОКОНВЕКЦИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ИЗОТЕРМИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ

Ряжских В.И., Слюсарев М.И., Богер А.А., Рябов С.В.
Воронежская государственная технологическая академия

Несмотря на вполне ясную физическую картину причины возникновения и развития термического свободноконвективного течения [1], идентификация основных гидродинамических и теплообменных характеристик по-прежнему вызывает трудности в связи с проблемами интегрирования фундаментальных уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска [2 – 4]. Этим и объясняется неослабевающий интерес к синтезу новых решений [5], базирующихся на корректных упрощающих допущениях, в том числе и к анализу классической задачи о свободноконвективном течении в вертикальном плоском канале при различных тепловых условиях [6 – 8]. Однако даже и в этом случае не удается избежать использования процедуры численного интегрирования, что существенно снижает теоретическую и практическую значимость получаемых результатов.

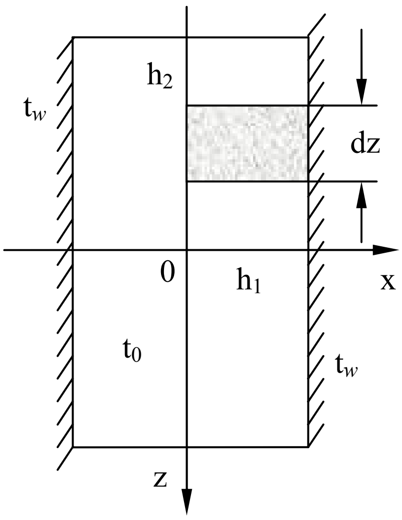

Рис. 1. Расчетная схема

Рассматривается задача возникновения, развития и прекращения свободноконвективного течения вязкой несжимаемой жидкости в вертикальном плоском канале неограниченной высоты и одинаковом изменении температуры боковых стенок до некоторого постоянного значения, отличного от начального.

Уравнения Обербека-Буссинеска в безразмерной компонентной форме для плоской декартовой системы координат, описывающие свободноконвективное движение вязкой несжимаемой среды с начальной температурой t_0 в прямоугольной области полушириной h_1 и высотой h_2 (рис. 1), боковые стенки которой поддерживаются при температуре t_w, таковы

$$\frac{\partial V_X}{\partial\theta}+\frac{2}{1+\xi}V_X\frac{\partial V_X}{\partial X}+\frac{2\xi}{1+\xi}V_Z\frac{\partial V_X}{\partial Z}=-\frac{2}{1+\xi}\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{4}{(1+\xi)^2}\left(\frac{\partial^2 V_X}{\partial X^2}+\xi^2\frac{\partial^2 V_X}{\partial Z^2}\right); \tag{1}$$

$$\frac{\partial V_Z}{\partial\theta}+\frac{2}{1+\xi}V_X\frac{\partial V_Z}{\partial X}+\frac{2\xi}{1+\xi}V_Z\frac{\partial V_Z}{\partial Z}=-\frac{2\xi}{1+\xi}\frac{\partial P}{\partial Z}+\frac{4}{(1+\xi)^2}\left(\frac{\partial^2 V_Z}{\partial X^2}+\xi^2\frac{\partial^2 V_Z}{\partial Z^2}\right)+\frac{8}{(1+\xi)^3}\mathrm{Gr}\left(T-T^*\right); \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}+\frac{2}{1+\xi}V_X\frac{\partial T}{\partial X}+\frac{2\xi}{1+\xi}V_Z\frac{\partial T}{\partial Z}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{4}{(1+\xi)^2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\xi^2\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}\right); \tag{3}$$

$$\frac{\partial V_X}{\partial X}+\xi\frac{\partial V_Z}{\partial Z}=0, \tag{4}$$

где $X=x/h_1$; $Z=z/h_2$; $\theta=\nu\tau/l_0^2$; $V_X=\upsilon_x/\tilde{\upsilon}$; $V_Z=\upsilon_z/\tilde{\upsilon}$; $\tilde{\upsilon}=\nu/l_0$; $l_0=2h_1/(1+\xi)$; $\xi=h_1/h_2$; $P=p'/\tilde{p}$; $\tilde{p}=\rho/(\nu/l_0)^2$; $T=(t-t_w)/\Delta t$; $T^*=(t^*-t_w)/\Delta t$; $\Delta t=t_0-t_w$; Pr, Gr – числа Прандтля и Грасгофа; τ – время; ν, ρ – кинематическая вязкость и плотность жидкости; υ_x, υ_z – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости; $p'=p-p_0$ – отклонение текущего давления p от гидростатического p_0; t^* – некоторая неизвестная характерная температура.

При $\xi\to 0$ система (1) – (4) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial V_X}{\partial\theta}=-2\frac{\partial P}{\partial X}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial V_Z}{\partial \theta} + 2V_X \frac{\partial V_Z}{\partial X} = 4\frac{\partial^2 V_Z}{\partial X^2} + 8\mathrm{Gr}\left(T - T^*\right); \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} + 2V_X \frac{\partial T}{\partial X} = \frac{4}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}. \quad (7)$$

Продифференцировав (5) по X с учётом (4), получим

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial V_X}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial V_X}{\partial X}\right) = -2\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \equiv 0, \quad (8)$$

откуда $P\left(X,Z,\theta\right) = f_1\left(Z,\theta\right)X + f_2\left(Z,\theta\right)$, где $f_1\left(Z,\theta\right)$, $f_2\left(Z,\theta\right)$ – некоторые функции, но из осесимметричности задачи следует $f_1\left(Z,\theta\right) = 0$, поэтому $\partial P/\partial X = 0$, т.е. $V_X = const$, а условие "прилипания" жидкости на стенке дает нулевое значение этой константы, следовательно $V_X \equiv 0$, в результате (5) – (7) трансформируется в систему:

$$\frac{\partial V_Z}{\partial \theta} = 4\frac{\partial^2 V_Z}{\partial X^2} + 8\mathrm{Gr}\left(T - T^*\right); \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{4}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}; \quad (10)$$

с очевидными граничными условиями

$$V_Z\left(X,0\right) = V_Z\left(1,\theta\right) = \partial V_Z\left(0,\theta\right)/\partial X = 0; \quad (11)$$

$$T\left(X,0\right) = 1;\ T\left(1,\theta\right) = \partial T\left(0,\theta\right)/\partial X = 0. \quad (12)$$

Применим интегральное преобразование Лапласа к (9) – (12) по переменной θ:

$$\frac{d^2 V_L}{dX^2} - \frac{s}{4}V_L = -2\mathrm{Gr}\left(T_L - \frac{1}{s}T^*\right); \quad (13)$$

$$\frac{d^2 T_L}{dX^2} - \frac{\mathrm{Pr}}{4}sT_L = -\frac{\mathrm{Pr}}{4}; \quad (14)$$

$$V_L\left(1,s\right) = dV_L\left(0,s\right)/dX = 0; \quad (15)$$

$$T_L\left(1,s\right) = dT_L\left(0,s\right)/dX = 0, \quad (16)$$

где V_L, T_L, s – изображения V_Z, T, θ. Подстановка решения уравнения (14) с граничными условиями (16)

$$T_L\left(X,s\right) = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}X\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}\right)}\right] \quad (17)$$

приводит к дифференциальному уравнению относительно V_L

$$\frac{d^2 V_L}{dX^2} - \frac{s}{4}V_L = -\frac{2}{s}\mathrm{Gr}\left[1 - \overline{T} - \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}X\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}\right)}\right] \quad (18)$$

с граничными условиями (15). Общее решение соответствующего однородного уравнения для (18)

$$V_L\left(X,s\right) = C_1\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}X\right) + C_2\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}X\right), \quad (19)$$

в котором $C_1 = C_1\left(X,s\right)$ и $C_2 = C_2\left(X,s\right)$ определены методом вариации произвольных постоянных из алгебраической системы:

$$\begin{cases} C_1'\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}X\right)+C_2'\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}X\right)=0; \\ C_1'\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}X\right)+C_2'\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}X\right)=-\frac{4\mathrm{Gr}}{s\sqrt{s}}\left[1-\overline{T}-\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}X\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}\right)}\right], \end{cases}$$

где $C_{1,2}'=dC_{1,2}\left(X,s\right)/dX$; в виде

$$C_1=-\frac{4\mathrm{Gr}}{s^2}\left\langle-\frac{1}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}\right)}\left\{\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}\sqrt{s}\left(1+\sqrt{\mathrm{Pr}}\right)X\right]}{1+\sqrt{\mathrm{Pr}}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}\sqrt{s}\left(1-\sqrt{\mathrm{Pr}}\right)X\right]}{1-\sqrt{\mathrm{Pr}}}\right\}+2\left(1-\overline{T}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}X\right)\right\rangle+\tilde{C}_1; \tag{20}$$

$$C_2=\frac{4\mathrm{Gr}}{s^2}\left\langle-\frac{1}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}\right)}\left\{\frac{\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}\sqrt{s}\left(1+\sqrt{\mathrm{Pr}}\right)X\right]}{1+\sqrt{\mathrm{Pr}}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}\sqrt{s}\left(1-\sqrt{\mathrm{Pr}}\right)X\right]}{1-\sqrt{\mathrm{Pr}}}\right\}+2\left(1-\overline{T}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}X\right)\right\rangle+\tilde{C}_2, \tag{21}$$

причем константы интегрирования $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ найдены из (15)

$$\tilde{C}_1=0,\ \ \tilde{C}_2=-\frac{8\mathrm{Gr}}{s^2\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}\right)}\left(1-T^*-\frac{1}{1-\mathrm{Pr}}\right). \tag{22}$$

Из (19) – (22) следует

$$V_L\left(X,s\right)=-\frac{8\mathrm{Gr}}{s^2}\left[\frac{1}{1-\mathrm{Pr}}\cdot\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}X\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}\right)}-1+T^*+\left(1-T^*-\frac{1}{1-\mathrm{Pr}}\right)\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}X\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}\right)}\right]. \tag{23}$$

Рассмотрим вначале стационарную составляющую оригинала изображения скорости (23), имея в виду, что $s=0$ корень кратности два. Декомпозируя (23) на слагаемые и используя вторую теорему Ващенко-Захарченко для идентификации оригинала от изображения, представимого в виде отношения бесконечных полиномов по *s* (причём степень полинома знаменателя больше степени полинома числителя), получим:

$$L^{-1}\left[\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}X\right)}{s^2\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}\right)}\right]=\theta+\frac{\mathrm{Pr}}{8}\left(X^2-1\right); \tag{24}$$

$$L^{-1}\left[\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}X\right)}{s^2\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}\right)}\right]=\theta+\frac{1}{8}\left(X^2-1\right), \tag{25}$$

где символ L^{-1} означает обратное преобразование Лапласа. На основании (24) и (25) и с учетом того, что $L^{-1}\left[s^{-2}\right]=\theta$ из (23) следует

$$L^{-1}\left[V_L\left(X,s\right)\right]=\lim_{\theta\to\infty}V_Z\left(X,\theta\right)=-8\mathrm{Gr}\lim_{\theta\to\infty}\left\{\frac{1}{1-\mathrm{Pr}}\left[\theta+\frac{\mathrm{Pr}}{8}\left(X^2-1\right)\right]-\left(1-T^*\right)\theta+\right.$$

$$\left.+\left(1-\overline{T}-\frac{1}{1-\mathrm{Pr}}\right)\left[\theta+\frac{1}{8}\left(X^2-1\right)\right]=-\mathrm{Gr}\cdot T^*\left(1-X^2\right).$$

Физическому смыслу задачи отвечает условие $V_Z\left(X,\infty\right)=0$, означающее прекращение течения из-за наступления теплового равновесия в канале, откуда $T^*=0$.

Нестационарные составляющие оригинала изображения скорости определяются выражениями

$$L^{-1}\left[\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}X\right)}{s^2\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot s}\right)}\right]=\frac{4}{\pi^3}\mathrm{Pr}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\cos\left[\frac{\pi}{2}(2n+1)X\right]\exp\left[-\frac{\pi^2}{\mathrm{Pr}}(2n+1)^2\theta\right],$$

$$L^{-1}\left[\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}X\right)}{s^2\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{s}\right)}\right]=\frac{4}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\cos\left[\frac{\pi}{2}(2n+1)X\right]\exp\left[-\pi^2(2n+1)^2\theta\right],$$

откуда оригинал скорости

$$V\left(X,\theta\right)=-\frac{32}{\pi^3}\mathrm{Gr}\frac{\mathrm{Pr}}{1-\mathrm{Pr}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\cos\left[\frac{\pi}{2}(2n+1)X\right]\times$$

$$\times\left\{\exp\left[-\frac{\pi^2}{\mathrm{Pr}}(2n+1)^2\theta\right]-\exp\left[-\pi^2(2n+1)^2\theta\right]\right\}. \tag{26}$$

При $\mathrm{Pr}\to 1$ в (26) возникает неопределенность типа $\frac{0}{0}$, раскрыв которую по правилу Лопиталя, т.е.

$$\left(1-\mathrm{Pr}\right)'_{\mathrm{Pr}}=-1\,;\ \left\{\exp\left[-\frac{\pi^2}{\mathrm{Pr}}(2n+1)^2\theta\right]\right\}'_{\mathrm{Pr}}=\exp\left[-\frac{\pi^2}{\mathrm{Pr}}(2n+1)^2\theta\right]\times\left[\frac{\pi^2}{\mathrm{Pr}^2}(2n+1)^2\theta\right],$$

получим

$$V\left(X,\theta\right)=\frac{32}{\pi^3}\mathrm{Gr}\theta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\left[\frac{\pi}{2}(2n+1)X\right]\exp\left[-\pi^2(2n+1)^2\theta\right]. \tag{27}$$

Оригинал изображения (17) даёт выражение для поля температуры

$$T\left(X,\theta\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\left[\frac{\pi}{2}(2n+1)X\right]\exp\left[-\frac{\pi^2}{\mathrm{Pr}}(2n+1)^2\theta\right]. \tag{28}$$

Среднеинтегральные характеристики найденных гидродинамических полей:

$$\overline{V}(\theta)=-\frac{64}{\pi^4}\mathrm{Gr}\frac{\mathrm{Pr}}{1-\mathrm{Pr}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}\left\{\exp\left[-\frac{\pi^2}{\mathrm{Pr}}(2n+1)^2\theta\right]-\exp\left[-\pi^2(2n+1)^2\theta\right]\right\}, \tag{29}$$

при $\Pr=1$

$$\overline{V}(\theta)=\frac{64}{\pi^4}\mathrm{Gr}\theta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\exp\left[-\pi^2(2n+1)^2\theta\right]; \qquad (30)$$

$$\overline{T}(\theta)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\exp\left[-\frac{\pi^2}{\Pr}(2n+1)^2\theta\right]. \qquad (31)$$

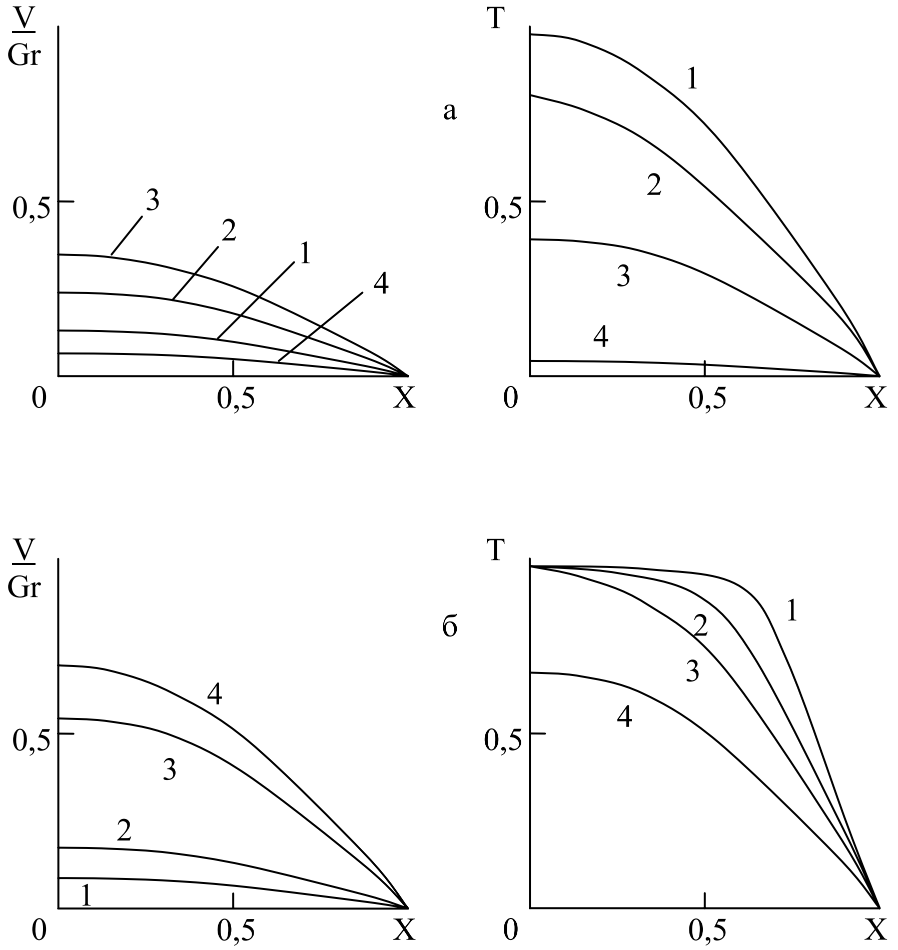

Рис. 2. Структура гидротермических полей при Pr=0.7 (а) и Pr=7 (б) для различных θ: 1 – 0,15; 2 – 0,03; 3 – 0,085; 4 – 0,35

Анализ показывает, что скорость среды в канале пропорциональна величине критерия Грасгофа. Для жидкостей с одинаковой вязкостью ν свободноконвективное течение развивается интенсивнее у той, у которой температуропроводность больше (рис. 2), а для жидкостей с одинаковой температуропроводностью зависимость от кинематической вязкости обратная. При $\Pr>1$ скорость течения затухает быстрее, чем наступает тепловое равновесие, при $\Pr<1$ наблюдается противоположная картина (рис. 3). Нетрудно заметить, что в случае когда $\Pr=1$, происходит одновременное затухание гидродинамического и теплового полей.

Относительная высота $H=z/(2h_1)$, на которую поднимается (опустится) жидкость с момента изменения температуры стенок канала, определена из решения задачи Коши

$$\frac{dH}{d\theta}=\overline{V}(\theta),\ H(0)=0$$

в виде

$$H=\frac{1}{15}\mathrm{Ra},$$

где $\mathrm{Ra}=\mathrm{Gr}\cdot\Pr$ – число Рэлея.

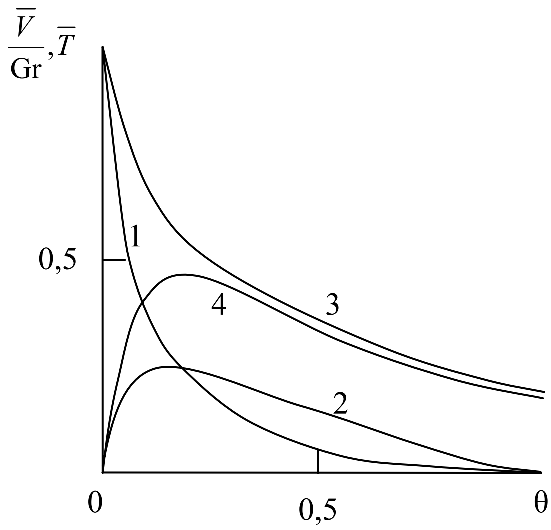

Рис. 3. Средние температура и скорость при Pr=0.7: 1 – $1-\overline{T}$; 2 – $\overline{V}/\mathrm{Gr}$; при Pr=7: 3 – $\overline{T}$; 4 – $\overline{V}/\mathrm{Gr}$

Определение коэффициента теплоотдачи α через градиент температуры на стенке канала в данной задаче не отвечает физическому смыслу, т.к. перенос теплоты по координате x в жидкости осуществляется теплопроводностью. В связи с этим из рассмотрения теплового баланса для элементарного объема (рис. 1), в предположении, что всё удельное количество теплоты на единицу длины, поступающее через стенку

$$dQ = -\alpha\left(\bar{t} - t_w\right) dz d\tau$$

идет на его нагрев (охлаждение)

$$dQ = \rho c_p d\bar{t} dz h_1,$$

где ρ, c_p – плотность и теплоёмкость жидкости; получено уравнение

$$\frac{d\overline{T}}{d\theta} = -4\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pr}}\overline{T}$$

с очевидным начальным условием

$$\overline{T}(0) = 1,$$

где $\mathrm{Nu} = \alpha h_1/\lambda$ – число Нуссельта; λ – теплопроводность жидкости, решение которого

$$\overline{T}(\theta) = \exp\left(-4\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pr}}\theta\right). \qquad (32)$$

Из равенства интегралов от (31) и (32) в пределах от 0 до ∞, следует, что $\mathrm{Nu} = 3$.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют об адекватности предлагаемого подхода и могут быть использованы для оценки влияния термической конвекции при функционировании различных энергонапряжённых технических устройств.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т.VI. Гидродинамика М.: Наука 1988.-736 с.
2. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунэ, Н.А. Верезуб и др.– М.: Наука, 1987. – 272 с.
3. Берковский Б.М., Полевиков В.К. Вычислительный эксперимент в конвекции. – Мн.: Университетское, 1988.-167 с.
4. Ряжских В.И., Слюсарев М.И., Богер А.А. Теплообмен при хранении жидкого водорода в наземных криогенных резервуарах / Альтернативная энергетика и экология. – 2007. – № 5. – С. 5-11.
5. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Самакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. Кн.1. М.: Мир, 1991. – 678 с.
6. Aung W. Fully developer laminar free convection between vertical prates heated asymmetrically // Int . J. Heat Mass Transfer. – 1972. – Vol. 15. – pp. 1577-1580.
7. Lee K.-T. Natural convection heat and mass transfer in partially heated vertical parallel plates // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1999. – v. 42. – №23. – pp. 4417-4425.
8. Cai R., Zhang N. Explicit analytical solution of 2-D laminar convection // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2003. – v. 46. – №5. – pp. 931-934.