

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ

Г. В. Кузнецов¹, М. А. Шеремет²

¹ Теплоэнергетический факультет, Томский политехнический университет, Томск, Россия

² Механико-математический факультет, Томский государственный университет, Томск, Россия

Проведено математическое моделирование сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутом объеме с локально сосредоточенными источниками тепловыделения в условиях конвективно-радиационного теплообмена с внешней средой. Математическая модель сформулирована в безразмерных переменных “векторный потенциал – вектор завихренности скорости – температура”. Краевая задача решена численно методом конечных разностей. Анализ проведен в широком диапазоне изменения числа Грасгофа $10^4 \leq Gr \leq 10^7$. Получены распределения термогидродинамических параметров, характеризующие существенные особенности исследуемого процесса. Установлены масштабы взаимного влияния конвективного теплопереноса в газовой полости и кондуктивной теплопередачи в элементах твердого материала.

Введение

Естественная конвекция, как один из механизмов переноса тепла, характерна для многих инженерных приложений [1] (химико-технологическая аппаратура, резервуары различного назначения, строительные сооружения). За последние годы проведено большое количество исследований свободноконвективного теплопереноса, например, [1–4]. Но при этом мало внимания уделялось анализу влияния ограждающих конструкций (стенки резервуаров, перекрытия и стены в помещениях и т.д.) на конвекцию в полости. Хотя в большинстве таких задач сопряженная постановка приводит к результатам [5, 6], иногда существенно отличающимся от результатов, полученных в несопряженной постановке.

Целью настоящей работы является математическое моделирование нестационарного пространственного сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутом объеме с источниками тепловыделения в условиях конвективно-радиационного теплообмена на одной из внешних граней области решения.

Математическая модель

Рассматривается краевая задача нестационарного сопряженного теплопереноса для области, представленной на рис. 1. Область решения включает как элементы твердого материала, имеющие различные размеры и теплофизические характеристики, так и газовую полость с источниками тепловыделения. Температура на источниках тепла остается постоянной в течение всего процесса. Горизонтальные стенки ($z = 0$, $z = H$, где H – размер рассматриваемой области решения по оси z) и вертикальные стенки ($x = L_x$; $y = 0$ $y = L_y$, где L_x – размер рассматриваемой области решения по оси x , L_y – размер рассматриваемой области решения по оси y), образующие газовую полость, предполагаются теплоизолированными с наружной стороны. На внешней границе одной из стенок ($x = 0$) осуществляется конвективно-радиационный теплообмен с окружающей средой.

Предполагается, что теплофизические свойства элементов твердого материала и газа не зависят от температуры, а режим течения является ламинарным. Газ считается

ньютоновской жидкостью, несжимаемой и удовлетворяющей приближению Буссинеска. Движение газа и теплоотдача во внутреннем объеме принимаются пространственными, теплообмен излучением от источника тепловыделения и между стенами – пренебрежимо малым по сравнению с конвективным теплообменом, газ абсолютно прозрачным для теплового излучения. Также в области решения присутствует зона с повышенной интенсивностью теплопередачи, состоящая из двух элементов твердого материала и слоя газа между ними (4 на рис. 1).

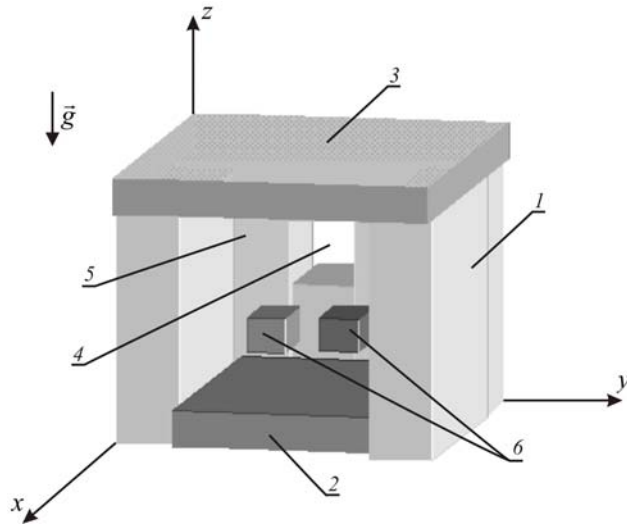


Рис. 1. Область решения рассматриваемой задачи: 1, 2, 3, 4 – элементы твердого материала; 5 – газовая полость; 6 – источники тепловыделения

В такой постановке процесс переноса тепла в рассматриваемой области (рис. 1) описывается системой нестационарных пространственных уравнений конвекции в приближении Буссинеска в газовой полости [2–4, 7] и нестационарным пространственным уравнением теплопроводности на основе гипотезы Фурье для элементов твердого материала [8] с нелинейными граничными условиями.

Математическая модель, соответствующая сформулированной физической постановке, рассматривалась в безразмерных переменных. В качестве масштаба расстояния выбрана длина рассматриваемой области решения по оси x . Для приведения к безразмерному

виду системы уравнений использовались следующие соотношения:

$$X = \frac{x}{L_x}, \quad Y = \frac{y}{L_x}, \quad Z = \frac{z}{L_x}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad U = \frac{u}{V_0}, \quad V = \frac{v}{V_0}, \quad W = \frac{w}{V_0}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_{hs} - T_0};$$

где x, y, z – декартовы координаты, X, Y, Z – безразмерные координаты, соответствующие x, y, z , t – время, τ – безразмерное время, t_0 – масштаб времени, u, v, w – составляющие скорости в проекциях на оси x, y, z соответственно, U, V, W – безразмерные скорости, соответствующие u, v, w , $V_0 = \sqrt{g_z \beta (T_{hs} - T_0) L_x}$ – масштаб скорости (скорость конвекции), T – температура, Θ – безразмерная температура, T_0 – начальная температура, T_{hs} – температура на источнике тепловыделения, g_z – z -составляющая вектора ускорения силы тяжести ($g_x = g_y = 0$), β – температурный коэффициент объемного расширения.

Моделирование процесса конвективного теплопереноса в газовой полости проводилось на основе переменных “векторный потенциал – вектор завихренности скорости – температура” [9–11]:

$$u = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y},$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Для обезразмеривания переменных векторный потенциал и вектор завихренности скорости использовались следующие соотношения:

$$\Psi_x = \frac{\Psi_x}{\Psi_0}, \quad \Psi_y = \frac{\Psi_y}{\Psi_0}, \quad \Psi_z = \frac{\Psi_z}{\Psi_0}, \quad \Psi_0 = V_0 L_x,$$

$$\Omega_x = \frac{\omega_x}{\omega_0}, \quad \Omega_y = \frac{\omega_y}{\omega_0}, \quad \Omega_z = \frac{\omega_z}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{V_0}{L_x};$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат; ψ_x, ψ_y, ψ_z – компоненты векторного потенциала $\vec{\psi}$ в декартовой системе координат; Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z – безразмерные компоненты векторного потенциала, соответствующие ψ_x, ψ_y, ψ_z ; Ψ_0 – масштаб компоненты векторного потенциала; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – компоненты вектора завихренности скорости $\vec{\omega}$ в декартовой системе координат; $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ – безразмерные компоненты вектора завихренности, соответствующие $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; ω_0 – масштаб компоненты вектора завихренности скорости.

Безразмерные уравнения Буссинеска в переменных “векторный потенциал – вектор завихренности скорости – температура” для рассматриваемой задачи имеют вид:

- в газовой полости (рис. 1)

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_x}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_x}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_x}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial U}{\partial X} - \Omega_y \frac{\partial U}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \Delta \Omega_x + \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial Y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_y}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_y}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial V}{\partial X} - \Omega_y \frac{\partial V}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \Delta \Omega_y - \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_z}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_z}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_z}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial W}{\partial X} - \Omega_y \frac{\partial W}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \Delta \Omega_z, \quad (3)$$

$$\Delta \Psi_x = -2 \cdot \Omega_x, \quad (4)$$

$$\Delta \Psi_y = -2 \cdot \Omega_y, \quad (5)$$

$$\Delta \Psi_z = -2 \cdot \Omega_z, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} + W \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \frac{1}{\text{Pr} \sqrt{\text{Gr}}} \Delta \Theta, \quad (7)$$

- для элементов твердого материала

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial \text{Fo}_i} = \Delta \Theta_i, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (8)$$

Начальные и граничные условия для сформулированной задачи (1)–(8) имеют вид:

Начальные условия:

$$\Psi_x(X, Y, Z, 0) = \Psi_y(X, Y, Z, 0) = \Psi_z(X, Y, Z, 0) = 0,$$

$$\Omega_x(X, Y, Z, 0) = \Omega_y(X, Y, Z, 0) = \Omega_z(X, Y, Z, 0) = 0,$$

$\Theta(X, Y, Z, 0) = 0$, за исключением источников тепловыделения, на которых во все время процесса $\Theta = 1$.

Граничные условия:

- на границе, разделяющей внешнюю среду и рассматриваемую область, записываются граничные условия, отражающие теплообмен за счет конвекции и излучения рассматриваемого объема с внешней средой

$$\frac{\partial \Theta_i(X, Y, Z, \tau)}{\partial X} = \text{Bi}_i \cdot \Theta_i(X, Y, Z, \tau) + \text{Bi}_i \cdot \frac{T_0 - T^e}{T_{\text{hs}} - T_0} + Q_i,$$

$$\text{где } Q_i = N_i \cdot \left[\left(\Theta_i(X, Y, Z, \tau) + \frac{T_0}{T_{\text{hs}} - T_0} \right)^4 - \left(\frac{T^e}{T_{\text{hs}} - T_0} \right)^4 \right], \quad X = 0;$$

где $i = 1, 3, 4$ в соответствии с рис. 1;

- на всех внешних границах рассматриваемой области кроме границы, на которой осуществляется теплообмен с внешней средой, заданы условия теплоизоляции

$$\frac{\partial \Theta_i(X, Y, Z, \tau)}{\partial X^k} = 0, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} i = \overline{1, 3}, \\ k = \overline{1, 3}; \end{array}$$

- на всех участках области решение, где происходит сопряжение материалов с различными теплофизическими параметрами, заданы условия 4-го рода

$$\Theta_i = \Theta_j, \quad \frac{\partial \Theta_i}{\partial X^k} = \lambda_{j,i} \frac{\partial \Theta_j}{\partial X^k}, \quad \text{где } i = \overline{1, 5}, \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3};$$

- на внутренних границах твердого материала и газа, параллельных плоскости XZ :

$$\Psi_x = \frac{\partial \Psi_y}{\partial Y} = \Psi_z = 0; \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial Y} = \lambda_{2,1} \frac{\partial \Theta_2}{\partial Y};$$

- на внутренних границах твердого материала и газа, параллельных плоскости YZ :

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial X} = \Psi_y = \Psi_z = 0; \quad \Theta_i = \Theta_2, \quad \frac{\partial \Theta_i}{\partial X} = \lambda_{2,i} \frac{\partial \Theta_2}{\partial X}, \quad i = 1, 4;$$

- на внутренних границах твердого материала и газа, параллельных плоскости XY :

$$\Psi_x = \Psi_y = \frac{\partial \Psi_z}{\partial Z} = 0; \quad \Theta_i = \Theta_2, \quad \frac{\partial \Theta_i}{\partial Z} = \lambda_{2,i} \frac{\partial \Theta_2}{\partial Z}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Использовались следующие обозначения: $Gr = g_z \beta (T_{\text{hs}} - T_0) L_x^3 / \nu^2$ – число Грасгофа; $Pr = \nu / a$ – число Прандтля; ν – коэффициент кинематической вязкости; a – коэффициент температуропроводности; $Fo_i = a_i t_0 / L_x^2$ – число Фурье, соответствующее i -ому материалу; Θ_i – безразмерная температура, соответствующая i -ому материалу ($i = \overline{1, 5}$ – в соответствии с рис. 1); $Bi_i = \alpha L_x / \lambda_i$ – число Био, соответствующее i -ому материалу; α – коэффициент теплообмена; λ_i – коэффициент теплопроводности, соответствующий i -ому материалу; T^e – температура окружающей среды; $N_i = \varepsilon \sigma (T_{\text{hs}} - T_0)^3 L_x / \lambda_i$ – число Старка, соответствующее i -ому материалу; $\lambda_{i,j} = \lambda_i / \lambda_j$ – относительный коэффициент теплопроводности.

Метод решения

Задача (1)–(8) с соответствующими граничными и начальными условиями решена методом конечных разностей [12–17].

Уравнения (1)–(8) решались последовательно, каждый временной шаг начинался с вычисления поля температуры как в газовой полости, так и в элементах твердого материала (уравнения (7), (8)), затем решались уравнения Пуассона для векторного потенциала (4)–(6). Далее определялись граничные условия для компонент вектора завихренности и решались уравнения (1)–(3).

Для численного решения уравнений (1)–(3), (7) применялась локально одномерная схема А.А. Самарского [12]. Аппроксимация конвективных членов рассматривалась усредненной относительно U и $|U|$ (V и $|V|$ или W и $|W|$) для того, чтобы схема не зависела от знака скорости [17]. Использовалась неявная разностная схема. Эволюционный член представлял собой одностороннюю разность по времени и имел первый порядок точности относительно шага по времени. Все производные по

пространственным координатам аппроксимировались со вторым порядком точности относительно шага по координате.

Уравнения (4)–(6) решались методом установления. Уравнение (8) также решалось с использованием локально одномерной схемы А.А. Самарского, причем для разрешения нелинейного граничного условия III рода использовался метод простой итерации.

Представленный метод решения был протестирован на модельной задаче [18, 19]. Сравнение проводилось по средним числам Нуссельта (табл.) на одной из вертикальных граней.

Таблица. Значения средних чисел Нуссельта

Ra	[18]	[19]	полученные результаты
10^4	2.055	2.100	2.053
10^5	4.339	4.361	4.307
10^6	8.656	8.770	8.627

Результаты, представленные в таблице, наглядно показывают, что используемый метод приводит к достаточно хорошему согласованию с работами других авторов.

Обсуждение результатов

Численные исследования краевой задачи (1)–(8) с соответствующими начальными и граничными условиями проведены при следующих значениях безразмерных комплексов: $10^4 \leq Gr \leq 10^7$, $Pr = 0.71$. Безразмерные определяющие температуры имели следующие значения: $\Theta^c = -1$, $\Theta_{hs} = 1$, $\Theta_0 = 0$. Основное внимание уделялось анализу влияния числа Грасгофа (Gr), характеризующего интенсивность источника тепловыделения, а также временного фактора на распределения основных характеристик исследуемого процесса.

На рис. 2 и 3 представлены линии тока и поля температуры, соответствующие режимам конвективного теплопереноса $Gr = 10^4$, 10^7 , в сечениях $X = 0.17$ и $Y = 0.25$, соответственно.

В газовой полости (рис. 2,а) за вторым элементом твердого материала зоны 4 (рис. 1) формируются две группы циркуляционных течений, отличающиеся направлением движения газовых масс. Каждая группа состоит из двух вихрей разных масштабов. Восходящие потоки находятся в центре полости, а нисходящие более холодные – у стенок. Такое распределение потоков связано с охлаждением элементов твердого материала. Скорости движения достаточно малы, что объясняется незначительной ролью выталкивающей силы. Подтверждением последнего является поле температуры, где кондуктивная теплопередача – основной механизм переноса тепла. В верхней части газовой полости заметно падение температуры, что связано с продвижением фронта пониженной температуры от границы $X = 0$ вглубь области решения. Распределение изотерм качественно повторяет образовавшиеся вихревые структуры в газовой полости, что является специфической чертой естественно-конвективного теплопереноса.

Увеличение числа Грасгофа в 10^3 раз приводит к существенному изменению как структуры течения, так и поля температуры. В газовой полости происходит уменьшение масштабов вторичных зон в области нижней стенки, а также перемещение ядра циркуляций к центральной части. Скорости течения при этом возросли. Поле температуры отражает преобладающую роль конвективного механизма переноса тепла

– заметно образование “координатных максимумов” изотерм, соответствующих безразмерным температурам 0.2 и 0.05. Происходит прогрев полости и, как результат, повышение температуры в верхней части газовой ячейки.

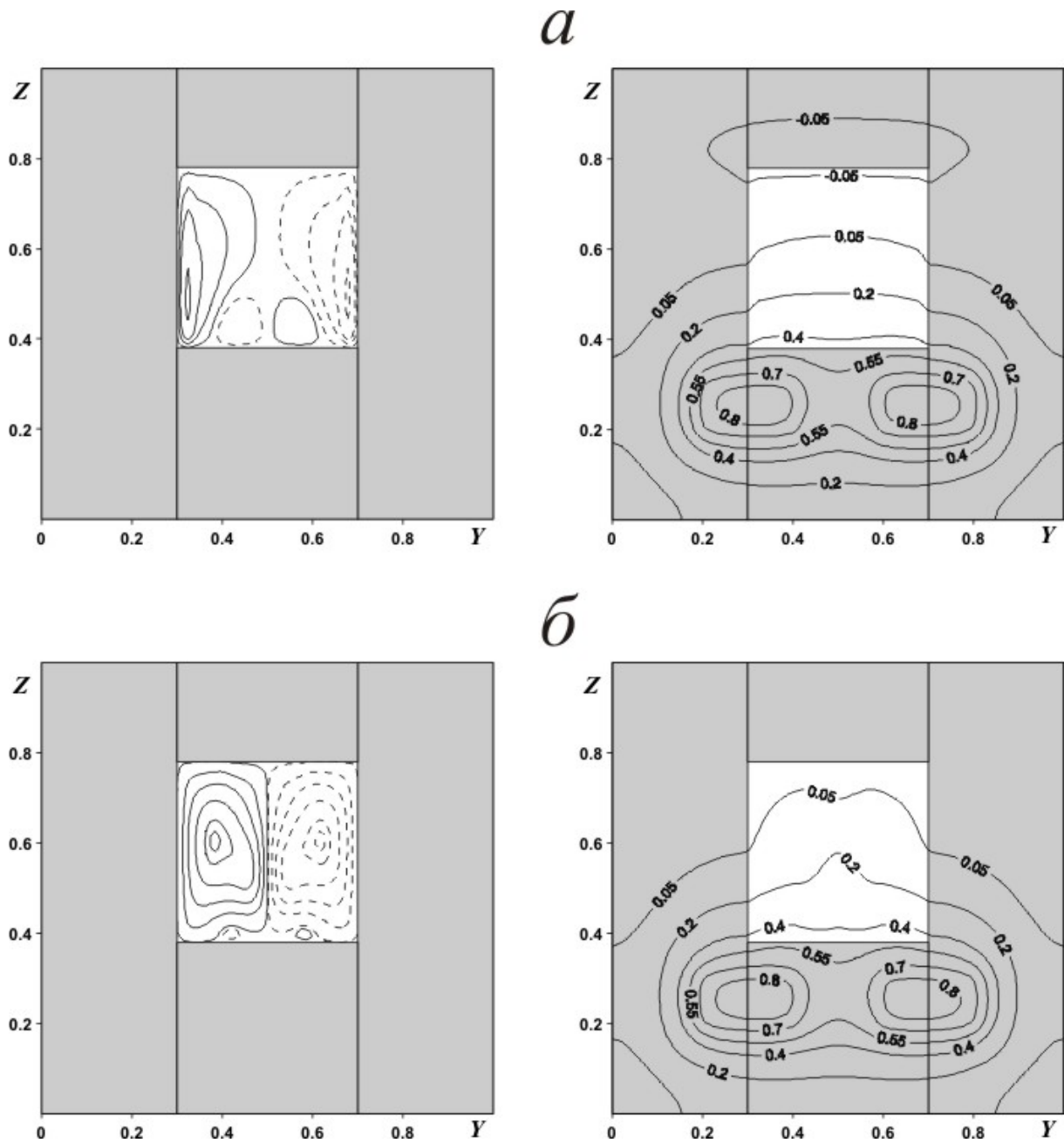


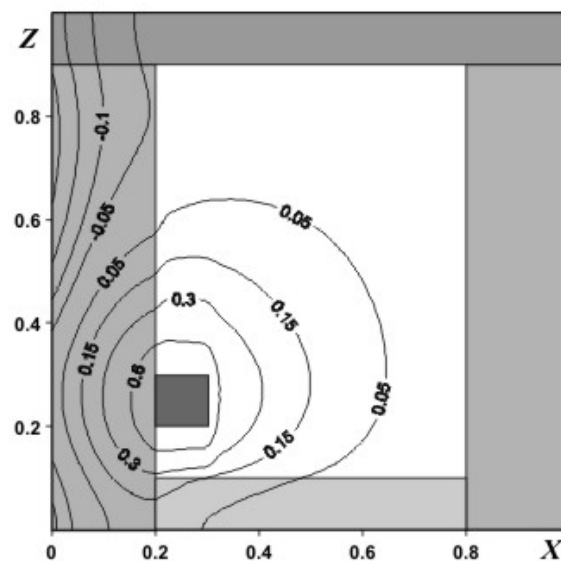
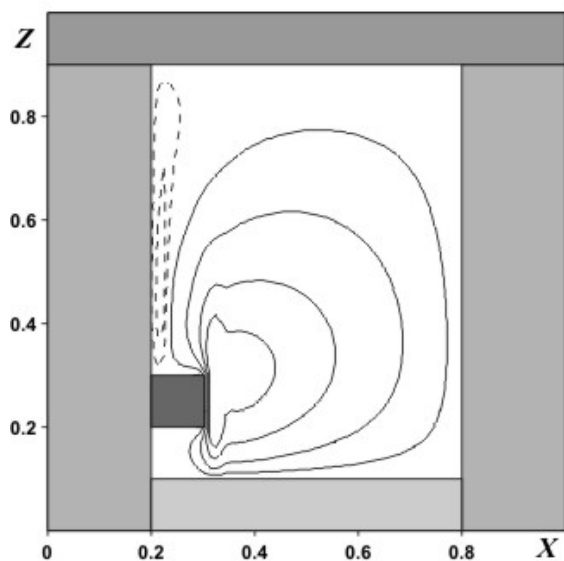
Рис 2. Типичные линии тока Ψ и поля температуры Θ при $X = 0.17$, $\tau = 400$:

$$Gr = 10^4 - a, Gr = 10^7 - б$$

На рис. 3 представлены линии тока и изотермы в сечении $Y = 0.25$, проходящем через источник тепловыделения. При $Gr = 10^4$ в газовой полости формируется основная конвективная ячейка, обусловленная наличием источника тепловыделения, а также зарождается вторичное течение у поверхности левой стенки. Структура изотерм в газовой полости незначительно отличается от конфигурации линий постоянной температуры в твердом материале, что связано с доминированием кондуктивного механизма переноса тепла в подвижной среде. Продвижение фронта пониженной

температуры вглубь области решения наблюдается в верхней части, где минимально влияние источника тепловыделения.

a



б

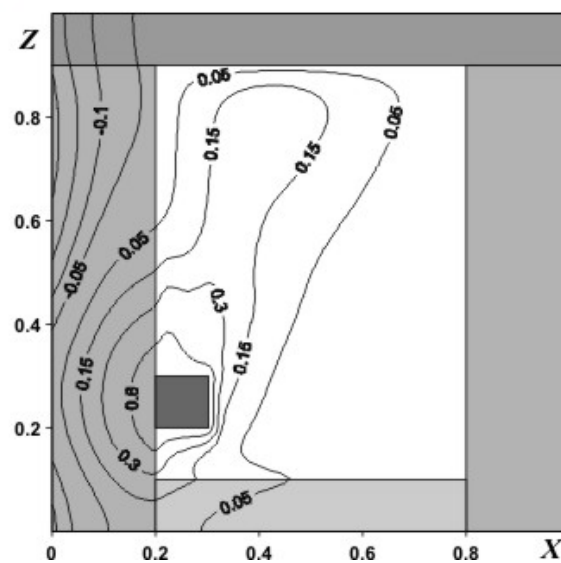
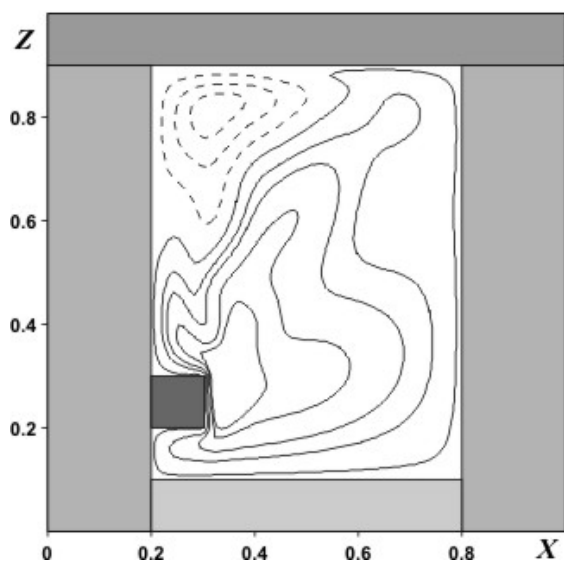


Рис 3. Типичные линии тока Ψ и поля температуры Θ при $Y = 0.25$, $\tau = 400$:

$Gr = 10^4 - a$, $Gr = 10^7 - б$

В режиме $Gr = 10^7$ происходит изменение структуры течения, вызванное увеличением роли выталкивающей силы, направленной на хаотизацию течения. Поле температуры в газовой полости отражает существенное влияние подъемной силы. При этом степень продвижения фронта пониженной температуры уменьшается.

Представленный анализ изменения локальных характеристик дополняется поведением интегрального параметра, отражающего теплообмен на границе газ–твердая стенка (рис. 4). В качестве такого параметра рассматривался обобщенный коэффициент теплообмена (среднее число Нуссельта):

$$Nu_1 = \frac{1}{0.64} \int_{0.1}^{0.9} \int_{0.1}^{0.9} \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0.8} dY dZ, \quad Nu_2 = \frac{1}{0.48} \int_{0.1}^{0.9} \int_{0.2}^{0.8} \left. \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{Y=0.1} dXdZ,$$

$$Nu_3 = \frac{1}{0.48} \int_{0.1}^{0.9} \int_{0.2}^{0.8} \left. \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \right|_{Z=0.1} dXdY, \quad Nu_4 = \frac{1}{0.48} \int_{0.1}^{0.9} \int_{0.2}^{0.8} \left. \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \right|_{Z=0.9} dXdY.$$

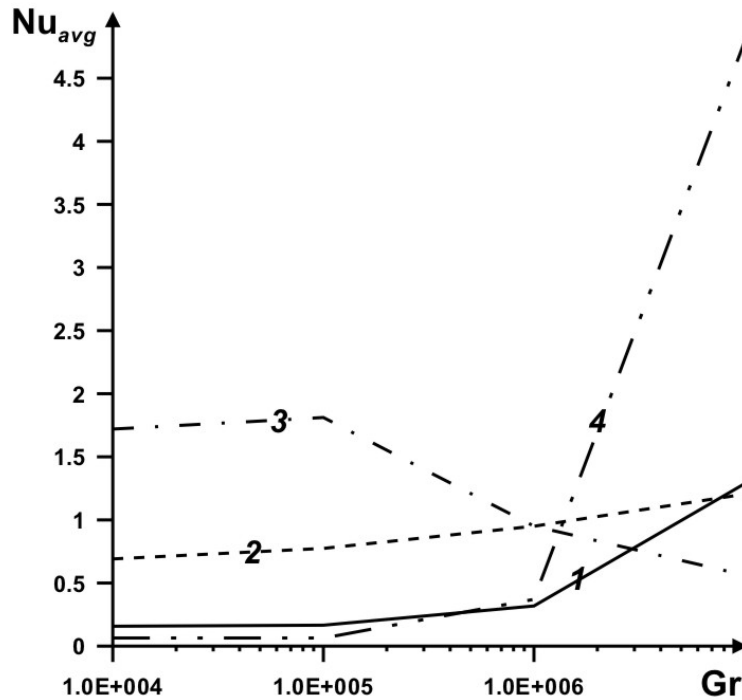
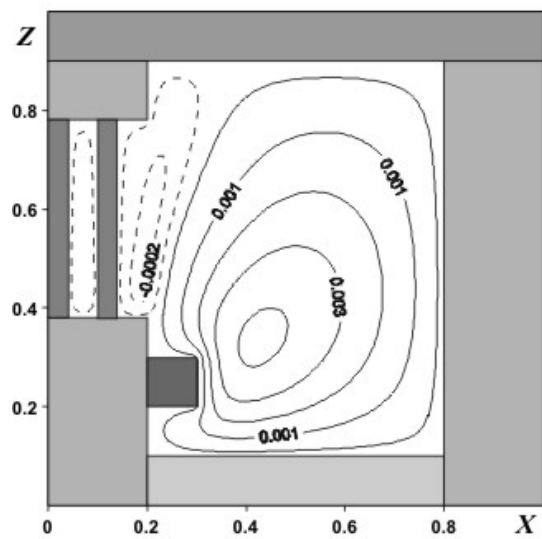


Рис. 4. Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Грасгофа на характерных границах раздела фаз при $\tau = 400$: 1 – Nu_1 , 2 – Nu_2 , 3 – Nu_3 , 4 – Nu_4

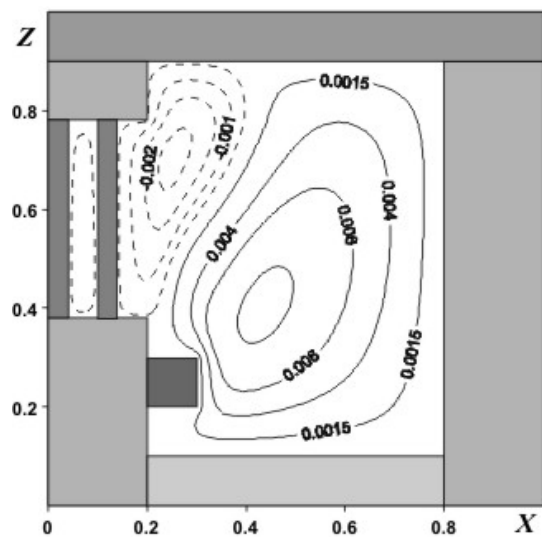
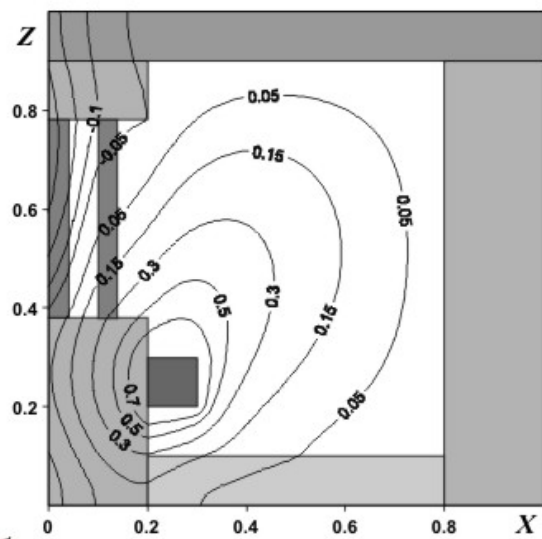
Характер изменения среднего числа Нуссельта связан с поведением градиента температуры на границах раздела двух фаз. Падение Nu_3 объясняется наличием газовых масс с температурой ниже, чем в зоне источника тепловыделения, что отражается на уменьшении градиента температуры.

Проведенный анализ влияния выталкивающей силы на формирование определенных термогидродинамических режимов позволяет предположить о существенной роли фактора нестационарности. Это объясняется тем, что в начальный момент времени система находилась в покое, а после появления температурного напора на источниках тепловыделения началось формирование определенных режимов течения. При этом фактор нестационарности обусловлен не только зарождением, развитием и некоторой диссипацией вихревых структур в газовой полости, но и нелинейным воздействием окружающей среды, вследствие наличия инерционных ограждающих конструкций на объект исследования.

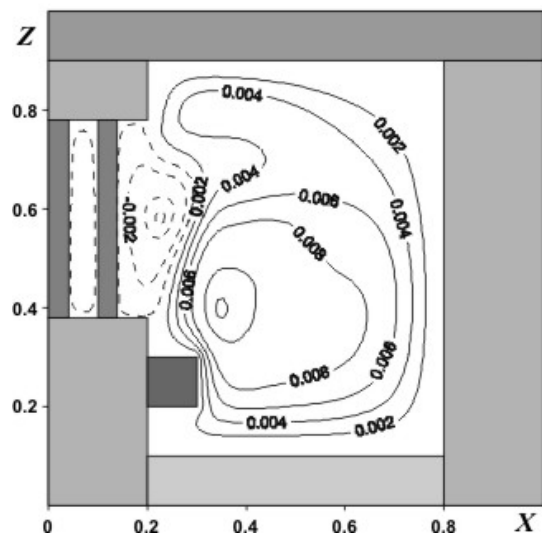
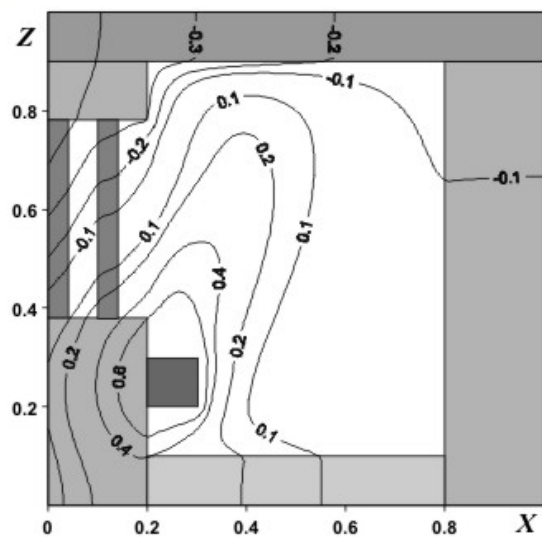
На рис. 5 представлена динамика изменения локальных характеристик с ростом параметра времени. Рост τ , в первую очередь, отражается на постепенном охлаждении области решения, что сказывается на характере течения в газовой полости.



a



б



в

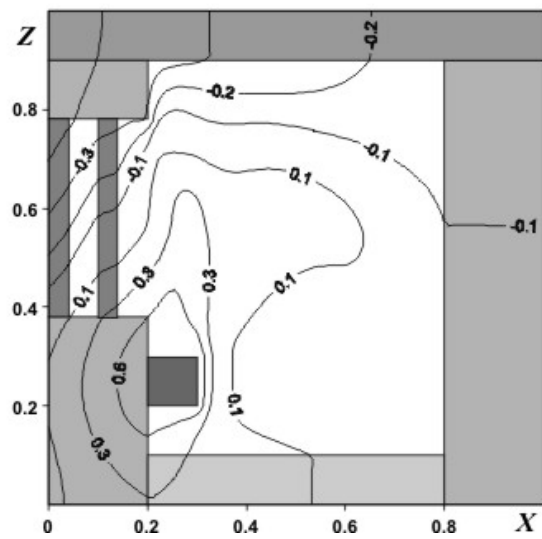


Рис. 5. Типичные линии тока Ψ и поля температуры Θ в сечении $Y = 0.35$, $Gr = 10^6$:
 $\tau = 400$ – *a*, $\tau = 20000$ – *б*, $\tau = 60000$ – *в*

Заключение

Проведено математическое моделирование сопряженной термогравитационной конвекции в замкнутом объеме в условиях конвективно-радиационного теплообмена на одной из внешних граней в достаточно широком диапазоне изменения числа Грасгофа $10^4 \leq Gr \leq 10^7$. Показано взаимное влияние конвективного теплопереноса в газовой полости и кондуктивной теплопередачи в элементах твердой стенки. Установлены масштабы влияния выталкивающей силы на формирование определенных режимов течения. Продемонстрирована роль фактора нестационарности, обусловленного не только распространением зоны влияния подъемной силы, но и инерционными свойствами ограждающих твердых стенок. Показано изменение среднего числа Нуссельта от числа Грасгофа на характерных границах раздела фаз.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Томской области (№ 05-02-98006 конкурс р_обь_а).

Литература

- [1] Полежаев В.И. Свободная конвекция: обзор моделей, методов и приложений. Труды 1 Российской национальной конференции по теплообмену. Москва, 1994. Т.2. С. 3-10.
- [2] Bejan A. Convection heat transfer, Wiley, New York, 2004, 728 p.
- [3] Burmeister L.C. Convective heat transfer, Wiley, New York, 1993, 640 p.
- [4] Martynenko O.G., Khramtsov P.P. Free-convective heat transfer: with many photographs of flows and heat exchange, Springer Verlag, 2005, 516 p.
- [5] Liaqat A., Baytas A.C. Conjugate natural convection in a square enclosure containing volumetric sources. Int. J. Heat Mass Transf. 2001. Vol. 44. pp. 3273-3280.
- [6] Lee J.R., Ha M.Y. A numerical study of natural convection in a horizontal enclosure with a conducting body. Int. J. Heat Mass Transf. 2005. Vol. 48. pp. 3308-3318.
- [7] Джалурия Й. Естественная конвекция: Тепло- и массообмен. М.: Мир, 1983. 400 с.
- [8] Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
- [9] Aziz K., Hellums J.D. Numerical solution of the three-dimensional equations of motion for laminar natural convection. The physics of fluids. 1967. Vol. 10, № 2. pp. 314-324.
- [10] Mallinson G.D., de Vahl Davis G. Three-dimensional natural convection in a box – a numerical study. J. Fluid Mech. 1977. Vol. 83, № 1. pp. 1-31.
- [11] Oosthuizen P.H., Paul J.T. Natural convection in a rectangular enclosure with two heated sections on the lower surface. Int. J. Heat Fluid Flow. 2005. Vol. 26. pp. 587-596.
- [12] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
- [13] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. 620 с.
- [14] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- [15] Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
- [16] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
- [17] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
- [18] Bessonov O.A., Brailovskay V.A., Nikitin S.A., Polezhaev, V.I. Three- dimensional natural convection in a cubical enclosure: a benchmark numerical solution. In: Intern. Symp. on Advances in Computational Heat Transfer, 26–30 May 1997 Cesme, Izmir, Turkey. 157-165.
- [19] Fusegi T., Hyin J.M., Kuwahara K. A numerical study of 3D natural convection in a differently heated cubical enclosure. Int. J. Heat Mass Transfer. 1991. Vol. 34. pp. 1543-1557.