VI Minsk International Heat and Mass Transfer Forum
MIF 2008, Minsk, May 19-23, 2008

УДК 519.68

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУЙНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА

А. В. Афанасьев[1], В. В. Афанасьева[1]

[1] *Московский государственный университет леса, Мытищи, Россия*
afanasev@mgul.ac.ru

Введение

Настоящая работа посвящена математическому моделированию обтекания горизонтального изотермического цилиндра плоской струей вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в режиме смешанной конвекции.

В электронике для охлаждения некоторых элементов устройств используются плоские и круглые струи воздуха, водяные и синтетические струи. Применяются как одиночные струи, так и массивы струй. Широкое применение в охлаждении микрочипов и «тепловых трубок», находящихся внутри персональных компьютеров, нашли именно ламинарные струи [1], так как они обеспечивают эффективное тепловое регулирование и позволяют экономить заряд батареи.

Задача о взаимодействии плоской струи с телами различной формы многопараметрическая, поэтому применение математического моделирования и вычислительного эксперимента как инструмента исследования данной задачи в настоящее время является актуальным.

При изучении обтекания кругового цилиндра струей жидкости можно воспользоваться данными основательно изученной задачи об обтекании цилиндра бесконечным потоком жидкости [2], так как эта задача является частным случаем струйного обтекания при условии, что ширина струи много больше диаметра цилиндра.

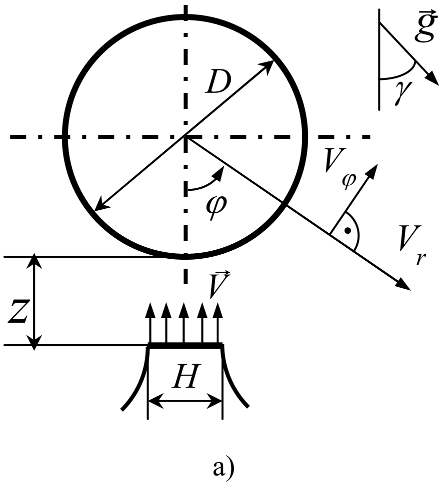
Данная работа является продолжением исследования смешанной конвекции при струйном обтекании цилиндра и посвящена рассмотрению двух подходов, применяемых для численной реализации процесса смешанной конвекции около горизонтального цилиндра.

Основные результаты исследований, полученные авторами с использованием конечно-разностного метода, представлены в работе [3]. Второй подход заключается в применении вихревого метода для моделирования взаимодействия струи с цилиндром. Данный метод позволяет определить структуру пространственного распределения гидродинамических характеристик и учесть влияние возмущений, возникающих в потоках. Нелинейные возмущения, которые возникают, например, из-за неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и трансформируются в вихревые структуры, оказывают сильное воздействие на гидродинамику и тепломассоперенос. Особенно ярко это проявляется при использовании импактных струй, которые широко применяются в практических приложениях.

Математическая постановка задачи

Рассматривается двумерная задача ламинарного обтекания нагретого цилиндра плоской струей жидкости в поле действия силы тяжести $\bar{g}$ (рис. 1а). На горизонтальный изотермический цилиндр, диаметром D, с температурой поверхности $T_{\text{ст}}$ из сопла шириной H натекает струя жидкости с постоянной температурой на срезе сопла $T_{\text{ж}}$ ($T_{\text{ж}} < T_{\text{ст}}$). Расстояние от среза сопла до цилиндра равно величине z. Профиль скорости на срезе сопла прямоугольный. Скорость истечения жидкости из сопла V – дозвуковая. Угол между вектором ускорения свободного падения и вектором скорости на срезе сопла – γ.

В основу модели положены нестационарные уравнения сохранения энергии (1) и Навье-Стокса в приближении Буссинеска с переходом к функции тока (Ψ) и функции интенсивности вихря (ω) – (2 – 4).



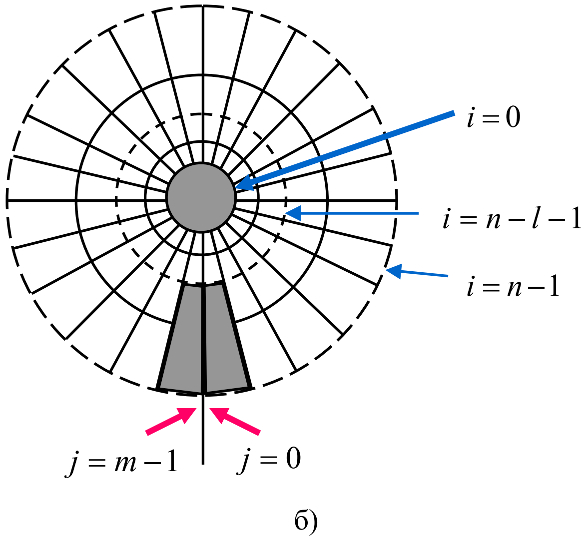


Рис. 1. Схема: а) объекта исследования;
б) расположения узлов сетки

Задача решалась в преобразованной полярной системе координат $(\bar{\xi},\varphi)$, стягивающей бесконечную область в область конечных размеров. Преобразование радиальной координаты осуществлялось в соответствии с соотношением $\xi = e^{-kr}$, где $k = \mathrm{const}$ – параметр преобразования координат.

Безразмерные переменные (отмечены чертой сверху) введены следующим образом: $\bar{\tau} = \dfrac{V}{D}\tau$; $\bar{\Psi} = \dfrac{\Psi}{VD}$; $\bar{\omega} = \dfrac{D}{V}\omega$; $\bar{V_r} = \dfrac{V_r}{V}$; $\bar{V_\varphi} = \dfrac{V_\varphi}{V}$; $\bar{T} = \dfrac{T - T_{ж}}{\Delta T}$, где $\Delta T = T_{ст} - T_{ж}$.

Определяющие параметры задачи: число Рейнольдса $\mathrm{Re} = VD/\nu$, число Грасгофа $\mathrm{Gr} = g\beta\Delta T\, D^3/\nu^2$ (число Ричардсона $\mathrm{Ri} = \mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2$), число Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu/a$, отношение ширины сопла к диаметру цилиндра – H/D и отношение расстояния от среза сопла до цилиндра к ширине сопла – z/H, угол между вектором ускорения свободного падения и вектором скорости на срезе сопла – γ .

Таким образом, уравнения примут вид:

уравнение переноса энергии

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{\tau}} - k\bar{\xi}\bar{V}_r\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{\xi}} - \frac{k}{\ln\bar{\xi}}\bar{V}_\varphi\frac{\partial\bar{T}}{\partial\varphi} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{k^2}{\ln\bar{\xi}}\left[\bar{\xi}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\left(\bar{\xi}\ln\bar{\xi}\cdot\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{\xi}}\right) + \frac{1}{\ln\bar{\xi}}\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\varphi^2}\right], \tag{1}$$

уравнение переноса импульса

$$\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{\tau}} - k\bar{\xi}\bar{V}_r\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{\xi}} - k\frac{\bar{V}_\varphi}{\ln\bar{\xi}}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\varphi} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{k^2}{\ln\bar{\xi}}\left[\bar{\xi}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\left(\bar{\xi}\ln\bar{\xi}\cdot\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{\xi}}\right) + \frac{1}{\ln\bar{\xi}}\frac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial\varphi^2}\right] - \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\frac{k}{\ln\bar{\xi}}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\bar{T}\cos(\varphi-\gamma)\right) + \bar{\xi}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\left(\ln\bar{\xi}\bar{T}\cdot\sin(\varphi-\gamma)\right)\right], \tag{2}$$

где

$$\bar{V_r} = -\frac{k}{\ln\bar{\xi}}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\varphi}, \qquad \bar{V_\varphi} = k\bar{\xi}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial\bar{\xi}} \tag{3}$$

– радиальная и тангенциальная составляющие скорости соответственно.

Уравнение, связывающее функцию интенсивности вихря с функцией тока:

$$\overline{\omega} = -\frac{k^2}{\ln\overline{\xi}}\left[\overline{\xi}\frac{\partial}{\partial\overline{\xi}}\left(\overline{\xi}\ln\overline{\xi}\cdot\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\overline{\xi}}\right)+\frac{1}{\ln\overline{\xi}}\frac{\partial^2\overline{\Psi}}{\partial\varphi^2}\right]. \quad (4)$$

Граничные условия:

На поверхности цилиндра $\overline{T} = \overline{T}_{ст} = 1$; $\overline{\Psi} = 0$; $\overline{V}_r = 0$; $\overline{V}_\varphi = 0$; на внешних стенках сопла $\overline{T} = \overline{T}_ж = 0$; $\overline{\Psi} = \mathrm{const}$; $\overline{V}_r = 0$; $\overline{V}_\varphi = 0$ – условия прилипания.

На срезе сопла – безвихревое течение и равномерное распределение скорости, $\overline{T} = \overline{T}_ж = 0$; $\overline{\Psi} = -z/D \cdot \sin\varphi$ (в физическом эксперименте подобные условия можно получить с помощью сопла Витушинского), граничные условия для $\overline{\omega}$ получаются из уравнения (4).

На внешней границе – условия полной проницаемости $\frac{\partial\overline{T}}{\partial\overline{\xi}} = 0$; $\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{\xi}} = 0$; $\frac{\partial\overline{V}_r}{\partial\overline{\xi}} = 0$; $\frac{\partial\overline{V}_\varphi}{\partial\overline{\xi}} = 0$. Эти условия численно были реализованы так, чтобы исключить влияние конечно – разностной аппроксимации граничных условий на течение вблизи цилиндра.

Начальные условия: на поверхности цилиндра $\overline{T} = \overline{T}_{ст} = 1$; во всей расчетной области $\overline{T} = \overline{T}_ж = 0$; на срезе сопла задано равномерное распределение скорости, во всей остальной расчетной области задано течение, соответствующее безотрывному обтеканию цилиндра струей идеальной жидкости конечной ширины.

Методы численного решения

I метод

Заключается в том, что дифференциальные уравнения (1 – 4) заменяются их конечно – разностными аналогами. Численное решение задачи ищется в узлах сетки. Аппроксимация конечными разностями дифференциальных уравнений (1; 2) проводилась по модифицированной явной схеме, ориентированной «против потока», с компенсацией погрешности первого порядка. Для аппроксимации составляющих скорости (3) использовались центральные конечные разности второго порядка. Уравнение (4) решалось методом установления по неявной схеме с использованием продольно – поперечных прогонок. По тангенциальной координате использовалась циклическая прогонка. Подробно данный метод решения описан в работе [3].

II метод

Метод «вихрей в ячейке» [4] совмещает некоторые из лучших черт лагранжева и эйлерова подходов. Лагранжевы частицы (дискретные точечные вихри), представляющие элементы жидкости, движутся в фиксированной эйлеровой сетке, которая в свою очередь используется для описания переменных поля.

В этом методе интегрируется уравнение траектории движения каждого дискретного вихря, то есть скорости вычисляются по значениям функции тока, которая в отличие от метода дискретных вихрей определяется не путем суммирования (наложения, суперпозиции) вкладов от отдельных дискретных вихрей, а из решения уравнения для функции тока с использованием сеточной функции завихренности, определенной путем осреднения вкладов дискретных вихрей по ячейкам сетки.

Точечные дискретные вихри генерируются на поверхности цилиндра и кромках сопла. Каждый дискретный вихрь характеризуется координатами местоположения и циркуляцией.

Уравнение (2) представим в виде трех частей.

1) Конвективная часть

$$\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\tau} - k\overline{\xi}\overline{V}_r\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{\xi}} - k\frac{\overline{V_\varphi}}{\ln\overline{\xi}}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\varphi} \qquad \text{или} \qquad \frac{D\overline{\omega}}{D\tau}, \quad (5)$$

аппроксимировалась вихревыми элементами, положения и циркуляция которых определялись согласно уравнениям:

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{d\tau} = \mathbf{u}_p\left(\mathbf{x}_p\right); \tag{6}$$

$$\frac{d\Gamma}{d\tau} = 0\,. \tag{7}$$

2) Диффузионная часть

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{k^2}{\ln\overline{\xi}}\left[\overline{\xi}\frac{\partial}{\partial\overline{\xi}}\left(\overline{\xi}\ln\overline{\xi}\cdot\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{\xi}}\right)+\frac{1}{\ln\overline{\xi}}\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial\varphi^2}\right], \tag{8}$$

которая моделировалась с применением «диффузионной» скорости [5]

$$\overline{V}_{\varphi}^{dif} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{k}{\ln\overline{\xi}}\cdot\frac{1}{\overline{\omega}}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\varphi}; \qquad \overline{V}_{r}^{dif} = \frac{1}{\mathrm{Re}}k\overline{\xi}\cdot\frac{1}{\overline{\omega}}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{\xi}}\,. \tag{9}$$

3) Часть, учитывающая влияние сил плавучести,

$$-\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\frac{k}{\ln\overline{\xi}}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\overline{T}\cos(\varphi-\gamma)\right)+\overline{\xi}\frac{\partial}{\partial\overline{\xi}}\left(\ln\overline{\xi}\cdot\overline{T}\sin(\varphi-\gamma)\right)\right]; \tag{10}$$

заменялась генерацией «тепловых» вихрей в узлах сетки.

Для перехода от системы дифференциальных уравнений и краевых условий к соответствующим конечно – разностным соотношениям рассматриваемая область изменения безразмерных координат $\left(\overline{\xi},\varphi\right)$ была заменена равномерной сеткой узловых точек (рис. 1б) с номерами i, j, которые изменялись в диапазонах: $0 \le i \le n-1,\ \ 0 \le j \le m-1$. Сетка задавалась как $n(l)\times m$, где n и m - количество всех узлов в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно, а l - количество узлов, приходящихся на сопло в радиальном направлении. Для того, чтобы на расстояние от сопла до цилиндра (z) приходилось целое количество шагов сетки, параметр преобразования координат k выбирался следующим образом: $k = -D/z\cdot\ln(l/n)$.

Безразмерный шаг между узловыми точками в радиальном направлении $\Delta\overline{\xi} = \overline{\xi_0}/n$, где $\overline{\xi_0} = e^{-k/2}$, а в тангенциальном направлении $\Delta\varphi = 2\pi/(m-1)$ (с учётом того, что значения функций при $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ хранились в разных ячейках памяти).

Величина шага по времени $\Delta\tau$ зависела от номера временного слоя и определялась из условий практической устойчивости. Аппроксимация конечными разностями дифференциального уравнения (1) проводилась по модифицированной явной схеме, ориентированной «против потока», с компенсацией погрешности первого порядка.

Для модельного уравнения переноса энергии (одномерного):

$$\frac{\partial T}{\partial\tau} = -U\frac{\partial T}{\partial x} + a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{11}$$

конечно – разностный шаблон выбранной схемы выглядит так:

$$\begin{aligned}\frac{T_i^* - T_i}{\Delta\tau} &= \left(|U_i| - U_i\right)\frac{T_{i+1}-T_i}{2\Delta x} - \left(|U_i| + U_i\right)\frac{T_i - T_{i-1}}{2\Delta x} + \\ &+ a\frac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{2\Delta x^2}\left[\left|1-|U_i|\frac{\Delta x}{2a}\right| + \left(1-|U_i|\frac{\Delta x}{2a}\right)\right]\end{aligned}, \tag{12}$$

где i – номер узла, T_i^* – значение температуры в узле сетки с номером i на новом временном шаге, x – координата, U – скорость.

Интенсивность вихря в узловых точках (рис. 2) изменялась согласно

$$\omega_q = \sum_p \frac{S_q\Gamma_p}{S^2}, \quad q = 1,2,3,4\ . \tag{13}$$

Циркуляция каждого дискретного вихря определялась по формуле:

$$\Gamma_p = \left(\omega_{\text{гр}} - \omega_{\Sigma w}\right) S \,, \tag{14}$$

где $\omega_{\text{гр}}$ - завихренность на границе определялась из уравнения (4),

S - площадь ячейки, внутри которой находится рассматриваемый вихрь,

$\omega_{\Sigma w}$ - завихренность, генерируемая отсоединенными вихрями, которые находятся в той же ячейке, определяется согласно уравнению (13).

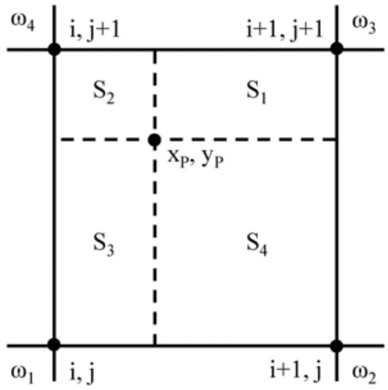


Рис. 2. Схема весов для распределения завихренности

После учета вкладов всех дискретных вихрей (13) завихренность оказывалась определенной во всех узлах сетки, и функция тока могла быть найдена из уравнения (4), которое решалось методом установления по неявной схеме с использованием продольно – поперечных прогонок.

Затем определялось поле скоростей и для каждого дискретного вихря определялась его скорость согласно выражению:

$$\mathbf{u}_p = \sum_{q=1}^{4} \frac{\mathbf{U}_q S_q}{S} \,, \tag{15}$$

также определялись «диффузионные» скорости:

$$\mathbf{u}_p^{dif} = \sum_{q=1}^{4} \frac{\mathbf{U}_q^{dif} S_q}{S} \,, \tag{16}$$

где $\mathbf{U}_q$ и $\mathbf{U}_q^{dif}$ – вектора скоростей, которые определяются из уравнений (3) и (9) соответственно, эти уравнения аппроксимировались центральными конечными разностями второго порядка.

Затем интегрированием по времени уравнения траекторий вихрей (6) определялись их новые положения:

$$\mathbf{x}_p(\tau + \Delta\tau) = \mathbf{x}_p(\tau) + \mathbf{u}_p(\tau)\Delta\tau + \mathbf{u}_p^{dif}(\tau)\Delta\tau \,. \tag{17}$$

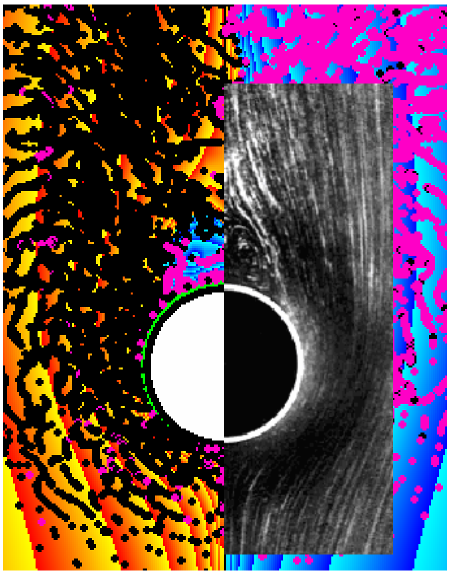
Далее для учета влияния сил плавучести авторы предложили в тепловом пограничном слое (область, где $\overline{T} > 0{,}05$) генерировать «тепловые» вихри, причем координаты «тепловых» вихрей соответствуют координатам узлов сетки, а циркуляция определялась по формуле:

$$\Gamma = \left(-\frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \frac{k}{\ln \overline{\xi}} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\overline{T} \cos(\varphi - \gamma) \right) + \overline{\xi} \frac{\partial}{\partial \overline{\xi}} \left(\ln \overline{\xi} \cdot \overline{T} \sin(\varphi - \gamma) \right) \right] \right) S \,. \tag{18}$$

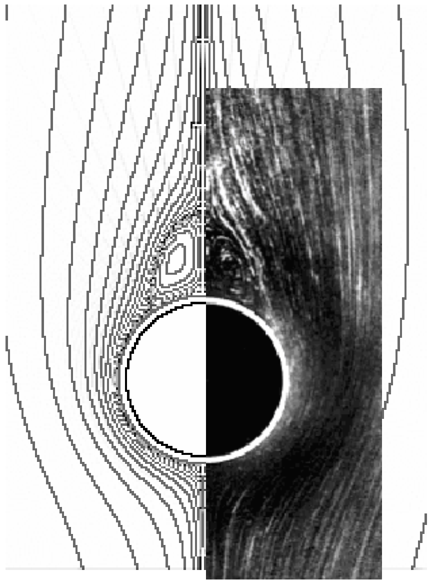
На основе рассмотренных методов расчета разработано программное обеспечение под Windows для проведения вычислительных экспериментов для исследования взаимодействия плоской струи вязкой несжимаемой жидкости с горизонтальным круговым цилиндром. Текст программы написан на языке программирования С++. Время расчета одного варианта задачи на персональном компьютере в среднем составляло около нескольких часов.

Тестирование методов

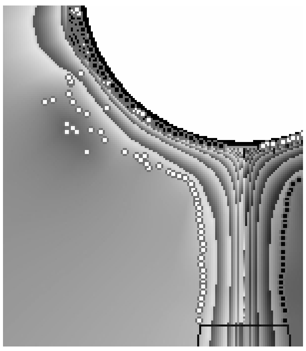
Тестирование программы проводилось в два этапа. Первый этап состоял в сопоставлении результатов расчетов с известными данными для обтекания цилиндра неограниченным потоком. Моделировалось обтекание цилиндра бесконечным потоком с применением второго метода (рис. 3а) и ограниченным потоком с применением первого метода при $H/D = 10$, $z/H = 1$ (рис. 3б) бесконечным потоком при $\mathrm{Re} = 13{,}1$. Результаты моделирования качественно согласуются с физическим экспериментом [2] (для наглядности картина течения по данным физического эксперимента наложена на рис. 3а, 3б с правой стороны).



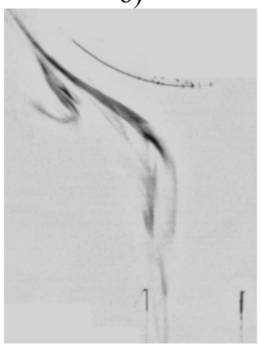
а)



б)



в)



г)

Рис 3. Картины течения:
а) для обтекания цилиндра бесконечным потоком (расчет по методу II);
б) для обтекания цилиндра бесконечным потоком (расчет по методу I);
в) для обтекания цилиндра струей (расчет по методу II);
г) для обтекания цилиндра струей (физический эксперимент)

По методу I были проведены расчеты обтекания изотермически нагретого цилиндра неограниченным потоком в режиме совпадающей смешанной конвекции. Полученные поля распределения температуры и тангенциальной скорости, а также распределения локального теплообмена совпадают с данными известных работ по изучению теплообмена и гидродинамики вблизи горизонтального цилиндра [6].

Второй этап заключался в сравнении результатов расчетов с данными лабораторных экспериментов для случая обтекания цилиндра плоской струей [7].

На рис. 3в представлены результаты моделирования взаимодействия струи с цилиндром с помощью метода «вихрей в ячейке». Надо отметить, что вихревые структуры, полученные в вычислительном эксперименте, качественно согласуются с данными физического эксперимента, рис. 3г соответствует негативу фотоснимка, визуализация картины течения получена авторами с помощью лазерного ножа и дыма.

Тестовые расчеты совпадающей смешанной конвекции при обтекании цилиндра неограниченным потоком и плоской струей, а так же расчеты естественной конвекции около горизонтального цилиндра показали, что имели место внутренняя сходимость при измельчении сетки и удовлетворительное согласование результатов расчетов с известными экспериментальными данными (рис. 4).

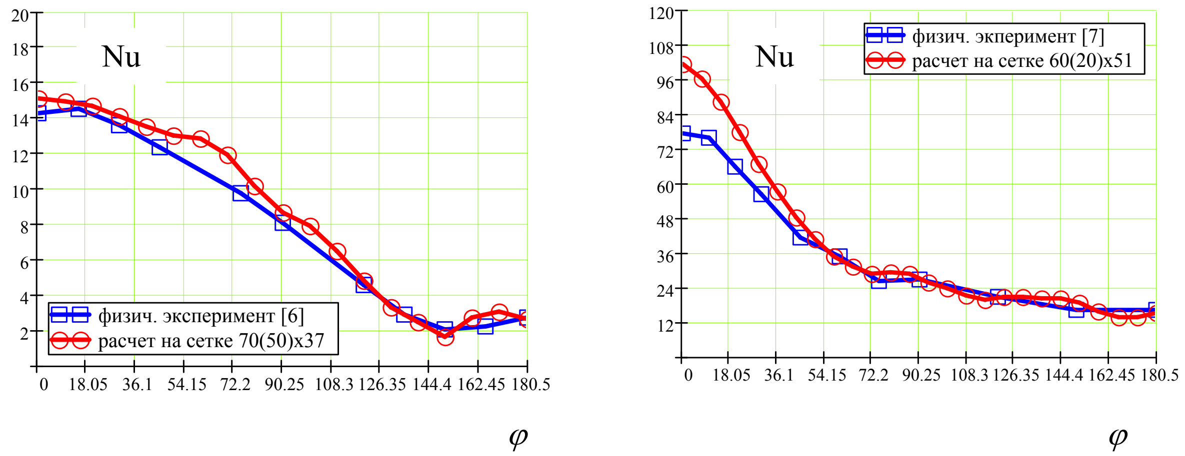


Рис 4. Распределения локального числа Нуссельта (расчет по методу II):
а) обтекание цилиндра потоком при Re = 188; Gr = 47700; Pr = 0,7; $\gamma = 0$;
б) обтекание цилиндра струей при Re = 4072; Gr = $2{,}5{\cdot}10^6$; Pr = 0,7; $H/D = 0{,}262$; $z/H = 2$; $\gamma = 0$

Таким образом, можно утверждать, что оба рассмотренных метода дают вполне надежные результаты, согласующиеся с известными данными физических экспериментов, и разработанная программа для проведения вычислительных экспериментов пригодна для исследования взаимодействия струи с нагретым цилиндром.

Результаты

Вычислительные эксперименты проводились для следующих диапазонов изменения определяющих параметров задачи: $\mathrm{Re} = 0 \div 4000$; $\mathrm{Gr} = 2{,}5\cdot 10^4 \div 2{,}5\cdot 10^6$ ($\mathrm{Ri} = 1{,}56\cdot 10^{-3} \div 250$); $\mathrm{Pr} = 0{,}5 \div 2$; $H/D = 0{,}131 \div 0{,}394$; $z/H = 1 \div 3$; $\gamma = 0$.

Ниже приведены результаты исследования процесса ламинарной совпадающей смешанной конвекции при струйном обтекании цилиндра. Вычислительные эксперименты проводились с использованием метода конечных разностей (метод I).

По результатам вычислительных экспериментов было установлено, что при взаимодействии струи с цилиндром режимы обтекания могут быть следующими:

1) Безотрывное обтекание, которое имеет место в случае преобладания естественной конвекции; 2) Образование двух симметричных устойчивых во времени вихрей в кормовой зоне цилиндра; 3) Периодический отрыв вихрей с кормовой зоны цилиндра (образование дорожки Кармана), который имеет место в случае преобладания вынужденной конвекции.

На рис. 5 представлены характерные картины течения в зависимости от чисел Рейнольдса и Грасгофа для фиксированного момента времени и геометрических параметров задачи (H/D и z/H).

После анализа картин течения вблизи цилиндра было установлено, что при увеличении параметра z/H можно добиться уменьшения размера вихрей в кормовой зоне цилиндра, а при уменьшении параметра H/D можно добиться безотрывного обтекания.

Выявлены закономерности положения угла отрыва от чисел Re и Gr. Под углом отрыва для нестационарного схода вихрей с кормовой зоны цилиндра подразумевается максимальный угол, при котором происходит отрыв.

Были проведены исследования локального (рис. 7) и среднего теплообмена (рис. 6); получены распределения локального числа Нуссельта на поверхности цилиндра, которое вычислялось по формуле $\mathrm{Nu} = k\bar{\xi}_0 \left.\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\xi}}\right|_{\bar{\xi}=\bar{\xi}_0}$ с использованием трехточечной схемы второго порядка. Было установлено, что локальный и средний теплообмен зависят от всех определяющих параметров, влияния каждого из параметров на характеристики теплообмена отражены в зависимостях (19) и (20).

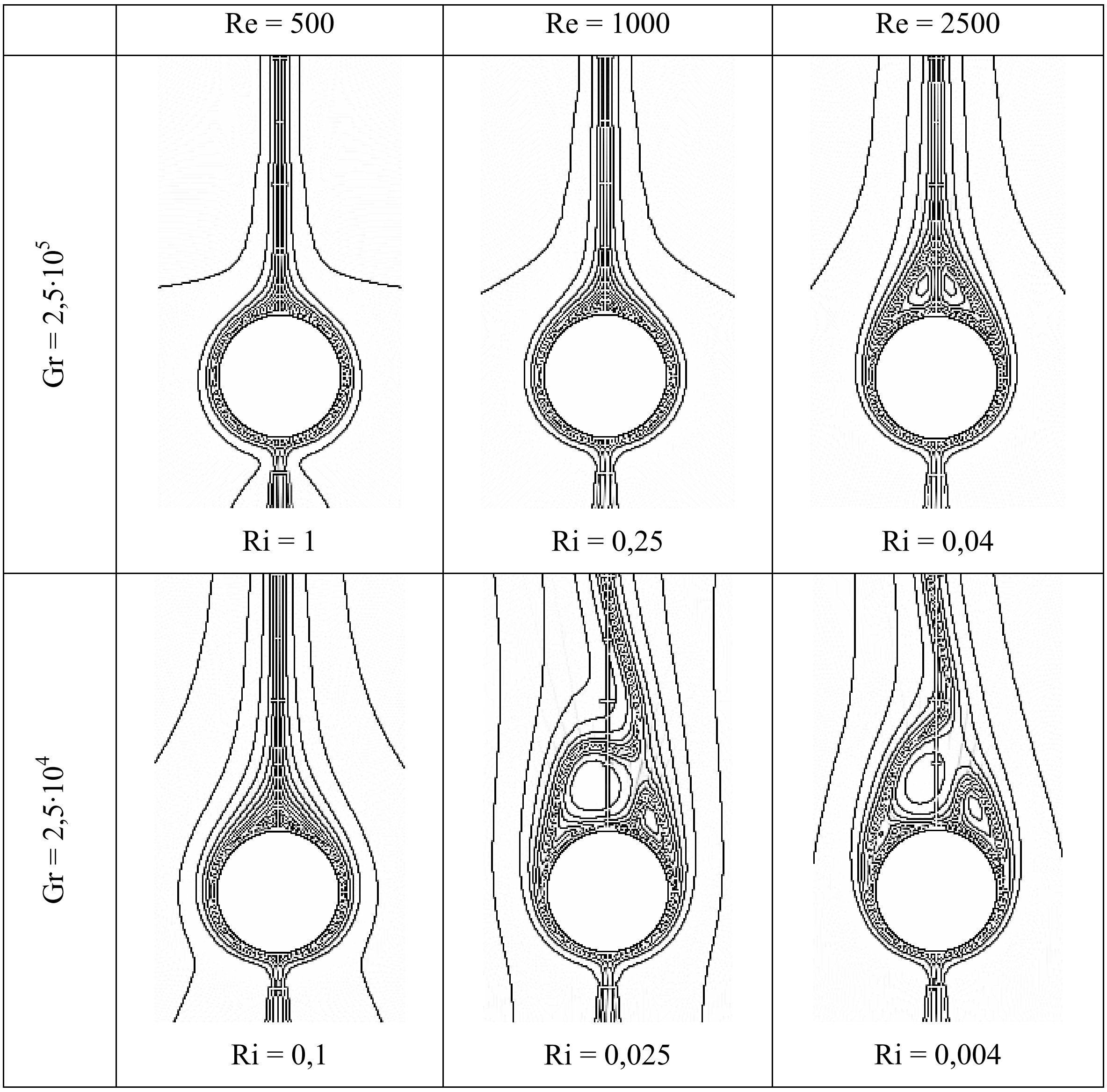


Рис. 5. Влияние чисел Re и Gr на распределение функции тока при струйном обтекании нагретого цилиндра для $\mathrm{Pr} = 0{,}7$; $H/D = 0{,}131$; $z/H = 2$; $\gamma = 0$

Далее приведены результаты обобщения характеристик среднего теплообмена и теплообмена в лобовой точке при струйном обтекании цилиндра в режиме ламинарной совпадающей смешанной конвекции.

Методом наименьших квадратов получена следующая формула для среднего числа Нуссельта ($\overline{\mathrm{Nu}}$):

$$\overline{\mathrm{Nu}}(\mathrm{Re};\mathrm{Gr};\mathrm{Pr};H/D;z/H)=\overline{\mathrm{Nu}}_e(\mathrm{Gr};\mathrm{Pr})+\mathrm{Pr}^{0,07(\log(\mathrm{Gr})+1)}\left(0,376\sqrt{z/H}+0,43\right)^{-1}\times \\ \times\left(f_1(\mathrm{Gr})\ln(\mathrm{Re}+1)+f_2(\mathrm{Gr})\sqrt{\mathrm{Re}}+f_3(\mathrm{Gr})\mathrm{Re}+f_4(H/D)\sqrt{\mathrm{Re}}+f_5(H/D)\mathrm{Re}\right), \qquad (19)$$

где: $\overline{\mathrm{Nu}}_e(\mathrm{Gr};\mathrm{Pr})=0,505(\mathrm{GrPr})^{0,25}\left(1+\dfrac{1,25}{(\mathrm{GrPr})^{0,25}}\right)\left(\dfrac{\mathrm{Pr}}{1+0,875\,\mathrm{Pr}}\right)^{0,25}$ – средний теплообмен при естественной конвекции [8],

$$f_1(\mathrm{Gr})=0,244(\log(\mathrm{Gr}))^2-2,441\log(\mathrm{Gr})+5,37;$$

$$f_2(\mathrm{Gr})=-5,146\cdot10^{-6}\,\mathrm{Gr}^{0,744}+0,39;$$

$$f_3(\mathrm{Gr})=1,21\cdot10^{-9}\,\mathrm{Gr}-7,3\cdot10^{-4};$$

$$f_4(H/D)=-0,218(H/D)^2+0,21(H/D)-0,041;$$

$$f_5(H/D)=10^{-3}\left(31,224(H/D)^2-19,252(H/D)+2,902\right).$$

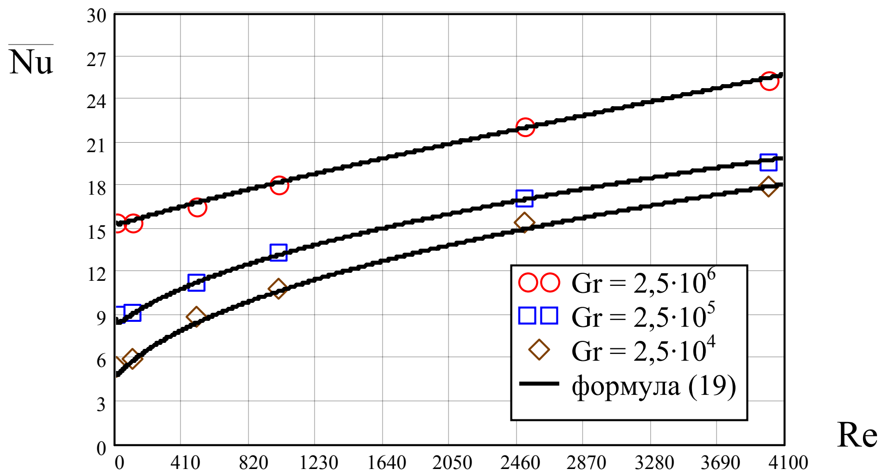


Рис. 6. Распределения среднего числа Нуссельта в зависимости от Re

при $\mathrm{Pr}=0,7$; $H/D=0,262$; $z/H=3$; $\gamma=0$

Формула справедлива для следующих диапазонов изменения параметров задачи: $\mathrm{Re}=0\div4000$; $\mathrm{Gr}=2,5\cdot10^4\div2,5\cdot10^6$ ($\mathrm{Ri}=1,56\cdot10^{-3}\div250$); $\mathrm{Pr}=0,5\div2$; $H/D=0,131\div0,394$; $z/H=1\div3$; $\gamma=0$. Результаты вычислительных экспериментов и данные, полученные по формуле (19), отражены на рис. 6. Максимальное расхождение данных вычислительных экспериментов с данными, полученными по формуле (19), составляет 9%.

Теплообмен в лобовой точке имеет важное практическое значение. Результаты вычислительных экспериментов по определению числа Nu в лобовой точке ($\mathrm{Nu}_{\varphi=0}$) представлены на рис. 7.

Из анализа полученных данных следует, что при изменении Re от 500 до 4000 значения $\mathrm{Nu}_{\varphi=0}$ не зависят от числа Грасгофа, и изменяются практически линейно от Re. На величину $\mathrm{Nu}_{\varphi=0}$ влияет отношение $z/D = (z/H)\cdot(H/D)$. Предложена следующая зависимость:

$$\mathrm{Nu}_{\varphi=0}(\mathrm{Re}; z/D) = 0{,}017\,\mathrm{Re}(z/D)^{-0{,}36} - 5(z/D) + 21\,. \qquad (20)$$

Формула (20) справедлива для $\mathrm{Re} = 500 \div 4000$; $\mathrm{Gr} = 2{,}5\cdot10^4 \div 2{,}5\cdot10^6$ ($\mathrm{Ri} = 1{,}56\cdot10^{-3} \div 10$); $\mathrm{Pr} = 0{,}7$; $H/D = 0{,}131 \div 0{,}394$; $z/H = 1 \div 3$, максимальное расхождение данных вычислительных экспериментов с данными, полученными по формуле (20), составляет $10\,\%$.

Формулы (19), (20) справедливы при условии $T_{\text{ст}} = const$. Физические параметры в числах подобия берутся по средней температуре.

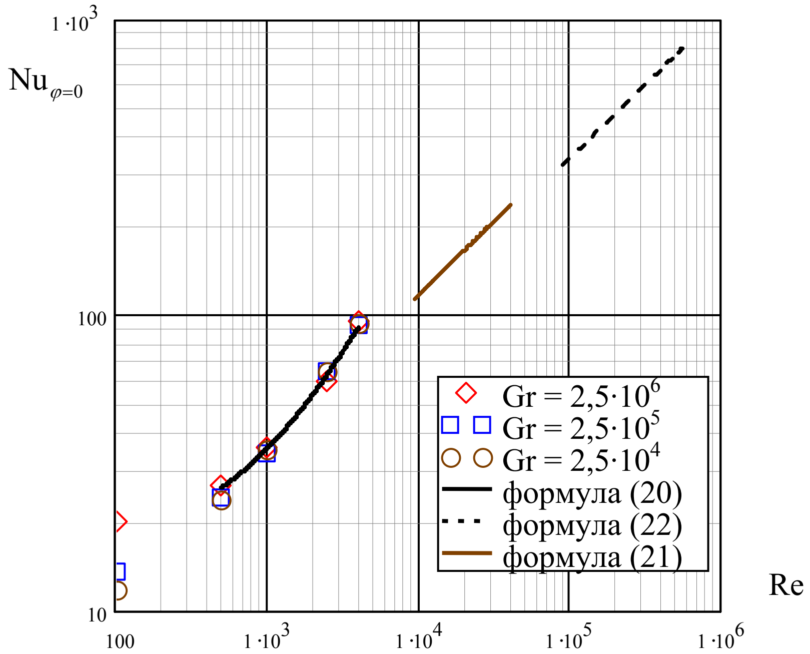


Рис. 7. Значения числа Нуссельта в лобовой точке для z/H=2; H/D=0,394; Pr=0,7

Имеются эмпирические зависимости по определению $\mathrm{Nu}_{\varphi=0}$ для других диапазонов изменения определяющих параметров. В работах [9] и [10] предложены соответственно формулы (21) и (22):

$$\mathrm{Nu}_{\varphi=0}(\mathrm{Re};\mathrm{Pr};H/D) = 1{,}285\,\mathrm{Re}^{0{,}5}\,\mathrm{Pr}^{0{,}4}\left(\frac{180}{\pi}\,\frac{0{,}682(H/D)+1{,}0}{(H/D)^{0{,}76}\left(150{,}3-26{,}7(H/D)^{0{,}5}\right)}\right)^{0{,}5}. \qquad (21)$$

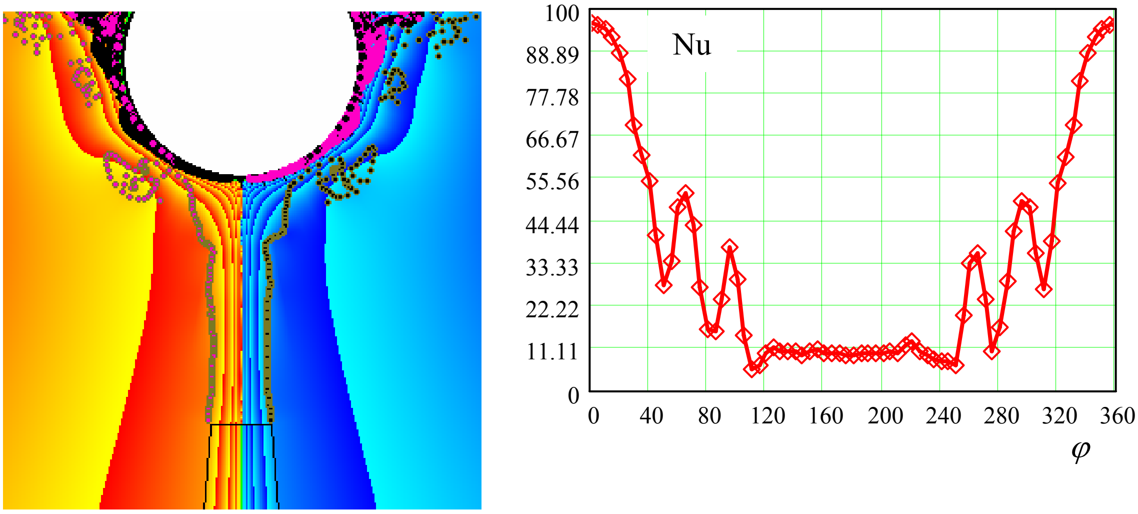
Формула (21) справедлива для $\mathrm{Re} = 9{,}5\cdot10^3 \div 4\cdot10^4$; $H/D = 0{,}037 \div 0{,}5$; $h/H = 1 \div 4$; $\mathrm{Pr} = 0{,}7$.

$$\mathrm{Nu}_{\varphi=0}(\mathrm{Re};H/D) = 1{,}03\,\mathrm{Re}^{0{,}5}\left(1{,}0-(2H/D)^{-2}+(2\,H/D)^{-3}\right)^{0{,}125}. \qquad (22)$$

Формула (22) справедлива для $\mathrm{Re} = 9{,}0 \cdot 10^4 \div 5{,}75 \cdot 10^5$; $H/D = 0{,}037 \div 2{,}0$; $h/H = 1 \div 3$; $\mathrm{Pr} = 0{,}7$.

Из рис. 7 следует, что полученная зависимость для вычисления локального числа Нуссельта в лобовой точке (20) в целом согласуется с характером поведения кривых, полученных другими авторами для других диапазонов изменения определяющих параметров, это служит дополнительным подтверждением того, что эта формула применима для инженерных расчетов.

Расчеты, проведенные при использовании метода «вихрей в ячейках», показали, что когерентные вихревые структуры влияют на распределение температуры вблизи поверхности цилиндра (рис. 8). Распределение локального числа Нуссельта на поверхности цилиндра имеет нестационарный характер (имеют место перемещающиеся локальные максимумы) и зависит от положения вихревых структур струи, которые в свою очередь порождают вниз по течению вихревые структуры на поверхности цилиндра.



а) б)

Рис. 8. Результаты вычислительных экспериментов с использованием метода «вихрей в ячейках»: а) картина течения; б) распределение мгновенного локального числа Нуссельта

Выводы

В работе описаны математическая модель и рассмотрены два метода численного решения задачи о взаимодействии плоской струи вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости с горизонтальным круговым цилиндром.

Показано, что подход, применяемый на основе конечно-разностного метода, и подход, базирующийся на методе «вихрей в ячейках», позволяют корректно моделировать движение вязкой теплопроводной жидкости вблизи поверхности цилиндра для случая обтекания цилиндра бесконечным потоком и плоской струей.

Данные тестовых расчетов, полученных для обоих методов численного решения, хорошо согласуются с известными экспериментальными данными.

Показано, что подход, применяемый на основе конечно-разностного метода, и реализованный алгоритм позволили получить необходимые данные по положению угла отрыва, режимам обтекания цилиндра и характеристикам теплообмена для ранее не исследованных областей изменения определяющих параметров изучаемого процесса.

Показана возможность обобщения результатов вычислительных экспериментов. Получены обобщающие зависимости для характеристик среднего теплообмена и теплообмена в лобовой точке.

Показано, что подход, базирующийся на методе «вихрей в ячейках», позволяет отслеживать поведение вихревых структур, имеющих место в физическом эксперименте. Нестационарное развитие вихревых структур приводит к тому, что характеристики теплообмена зависят от времени, причем колебания температуры начинаются в тот момент, когда вихревые структуры от сопла достигают преграды. Данный метод позволяет исследовать вихревые структуры в слое смешения и их влияния на характеристики теплообмена.

Список обозначений

g - ускорение свободного падения;
D - диаметр цилиндра;
$T_{\text{ст}}$ - температура поверхности цилиндра;
H - ширина сопла;
$T_{\text{ж}}$ - температура на срезе сопла;
z - расстояние от среза сопла до цилиндра;
V - скорость истечения жидкости из сопла;
γ - угол между вектором ускорения свободного падения и вектором скорости на срезе сопла;
Ψ - функция тока;
ω - функция интенсивности вихря;
ξ - модифицированная радиальная координата;
r - радиальная координата;
φ - тангенциальная координата;
$\overline{V}_{\varphi}^{dif}$ - тангенциальная компонента «диффузионной» скорости;
$\overline{V}_{r}^{dif}$ - радиальная компонента «диффузионной» скорости;
$\mathbf{x}_p$ - координата p вихря;
$\mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p)$ - скорость вихря в $\mathbf{x}_p$ точке;
Γ - циркуляция вихря;
i, j - номера сетки;
$n(l)\times m$ - параметры сетки;
S - площадь ячейки;
Gr – число Грасгофа, $\mathrm{Gr} = g\beta\Delta TD^3/\upsilon^2$;
Nu – число Нуссельта, $\mathrm{Nu} = \alpha D/\lambda$;
Pr – число Прандтля, $\mathrm{Pr} = \upsilon/a$;
Re – число Рейнольдса, $\mathrm{Re} = (VD)/\upsilon$;
Ri – число Ричардсона, $\mathrm{Ri} = \mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2$.

Список литературы

[1] Guarino J.R., Manno V.P., Characterization of laminar jet impingement cooling in portable computer applications. // Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium. San Jose (California, USA), 2001 (http://www.rostenaward.org/manno1.pdf).
[2] Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа / М. Ван-Дайк – М.: Мир, 1986. – 184 с.
[3] Афанасьев А.В., Афанасьева В.В., Хроменко А.В. Численное исследование совпадающей смешанной конвекции при обтекании горизонтального цилиндра плоской струей вязкой несжимаемой жидкости. Вычислительные методы и программирование. – 2007. – М: Изд-во МГУ –Т.8. №1. – С 65 – 73. – ISSN 0507-5386.
[4] Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. – Ленинград : Гидрометеоиздат, 1986. 352 с.
[5] Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье-Стокса // Доклады РАН. – 2004, Т. 399, № 1. – С. 42-46.
[6] Хроменко А.В. Гидродинамика и теплообмен горизонтального цилиндра при ламинарной смешанной конвекции : дис. … канд. техн. наук : 05.14.05 / Андрей Владимирович Хроменко. – М., 1990. – 252 с.
[7] Беляков В.А., Хроменко А.В., Парыгин К.Э., Климов В.О. Гидродинамика и теплообмен горизонтального цилиндра в плоской турбулентной струе в режиме смешанной конвекции. Технология и оборудование для переработки древесины: сб. науч. тр. – Вып. 319. – М.: МГУЛ, 2003. – С. 155 – 159.
[8] Брдлик П.М. Внешние задачи теплообмена при гравитационной конвекции / П.М. Брдлик – М. : МЛТИ, 1988. – 71с.
[9] Парыгин К.Э. Теплообмен и гидродинамика при вынужденном обтекании тела цилиндрической формы плоской турбулентной струей : дис. … канд. техн. наук : 01.04.14. / Парыгин Константин Эдуардович – М., 2003. – 250с.
[10] Жанабаев З.Ж. Аэродинамика и теплообмен цилиндра и шара при струйном обтекании: дис. канд. физ.-мат. наук: / З.Ж. Жанабаев. – Алма-Ата, 1968. – 154 с.