УДК 517.94

СТРУКТУРА КЛАССОВ СИНГУЛЯРНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛООБМЕНА В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

Н.В.Дилигенский, А.П.Ефимов
Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

В построении конструктивных математических моделей явлений теплопереноса в технологических процессах обработки изделий пионерскими являются работы академика Н.Н.Рыкалина, предложившего на основе аргументированных содержательных физических соображений упрощенный метод расчета температур при высокоскоростной сварке. Под названием «теория быстродвижущихся источников тепла» его подходы и результаты легли в основу нового научного направления - технологическая теплофизика. Сформировались научные школы, развивающие идеи Н.Н.Рыкалина применительно к расчету тепловых явлений в широком круге технологических процессов литья, термической, плазменной, лазерной обработки материалов, в задачах теплофизики резания, шлифования, термоупрочнения, тепловой защиты, получения новых материалов, самораспространяющегося высокотемпературного синтеза и других.

С физической точки зрения подход Н.Н.Рыкалина основан на неучете кондуктивного теплопереноса по направлению перемещающегося с высокой скоростью источника тепла. Опираясь на такую физическую гипотезу, строятся достаточно простые аналитические решения соответствующих краевых задач теплопроводности. Однако обоснование применимости такого подхода как приближенного метода решения корректно сформулированных классических задач теплопроводности встречает существенные затруднения.

С математической точки зрения теория быстродвижущихся источников тепла отвечает аппроксимации несамосопряженного эллиптического оператора в частных производных параболическим. Решения от точечных источников тепла – фундаментальные решения и функции Грина, являющиеся базовыми моделями в приближенной теории Н.Н.Рыкалина,- для этих различных операторов имеют разный порядок сингулярностей в окрестности теплоисточников и сколь угодно различаются в равномерной метрике С. В рамках классических решений обосновать такие приближения нельзя, и необходим переход к постановке, решению и анализу задач теплопроводности в пространствах обобщенных функций – функционалов.

Эффективным способом получения приближенных решений задач технологической теплофизики является построение точных решений в пространствах преобразования Фурье обобщенных функций, разложение трансформант Фурье в асимптотические ряды и дальнейший переход к обобщенным функциям – оригиналам. Таким образом, конструируются множества различных классов математических асимптотических и квазиасимптотических сингулярных моделей с различными содержательными и аппроксимативными свойствами,
одна из которых совпадает с теорией Н.Н.Рыкалина.

В совокупности арсенал существующих аналитических средств позволяет конструировать многообразие математических моделей технологической теплофизики с желаемыми требуемыми свойствами для целей описания, расчета, анализа, управления и оптимизации протекающих тепловых процессов.

Так, модель быстродвижущихся источников тепла Н.Н. Рыкалина отвечает описанию квазистационарного температурного поля с дифференциальным оператором

$$\upsilon\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=Q(x,y) \qquad (1)$$

приближенным представлением при $\upsilon\to\infty$

$$\upsilon\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=Q(x,y). \qquad (2)$$

Дифференциальные уравнения в частных производных представлены в безразмерной критериальной форме, где θ и Q относительные температура и мощность теплоисточника, x,y - безразмерные пространственные координаты, υ - критерий Пекле (безразмерная скорость движения теплоисточника). Использование приближения (2) отвечает приближенной замене эллиптического оператора (1) параболическим (2), и в метрике равномерной сходимости C может приводить к сколь угодно большой погрешности расчета температур.

Дадим обоснование представления (2) в рамках сингулярных асимптотических разложений. Запишем в трансформантах Фурье в пространствах обобщенных функций для фундаментального решения $E(x,y)$ уравнения (1) следующий формальный бесконечный ряд

$$\tilde{\tilde{E}}=\frac{1}{i\upsilon u+u^2+v^2}=\frac{1}{\left(i\upsilon u+v^2\right)\cdot\left(1+\frac{u^2}{i\upsilon u+v^2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iu)^{2n}}{\left(i\upsilon u+v^2\right)^{n+1}},\quad \upsilon\to\infty \qquad (3)$$

где $\tilde{\tilde{\theta}}(u,v)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta(x,y)\cdot e^{-iux-ivy}dxdy$, $\upsilon\frac{\partial E}{\partial x}-\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=\delta(x,y)$, $\delta(x)$ - функция Дирака.

Переходя в (3) к оригиналам, обращая в выражении (3) по Фурье знаменатель для n-ого члена ряда, получим

$$\frac{1}{\left(i\upsilon u+v^2\right)^{n+1}}\doteq\frac{H(x)}{2\sqrt{\pi}\cdot n!\upsilon^{n-\frac{1}{2}}}\cdot x^{n-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{\upsilon y^2}{4x}}, \qquad (4)$$

где $H(x)$ - единичная функция Хевисайда. Применяя далее теорему дифференцирования запишем

$$\frac{\left(iu^{2n}\right)}{\left(i\upsilon u+v^2\right)^{n+1}}\doteq\frac{H(x)}{2\sqrt{\pi}\cdot n!\upsilon^{n-\frac{1}{2}}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n}\left(x^{n-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{\upsilon y^2}{4x}}\right). \qquad (5)$$

Учтем далее, что $2n$ - производная в (5) с некоторой нормировкой определяет обобщенные многочлены Лагерра

$$L_{2n}^{-n-\frac{1}{2}}(z)=\frac{1}{2n!}e^{z}\cdot z^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2n}\cdot\left(z^{n-\frac{1}{2}}\cdot e^{-z}\right) \qquad (6)$$

Окончательно, на основе формул (5), (6) результат обращения (3) в оригиналах по x, у получим в виде

$$\frac{1}{2\pi}e^{\frac{\upsilon}{2}x}K_0\left(\frac{\upsilon}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{H(x)e^{\frac{\upsilon y^2}{4x}}}{2\sqrt{\pi\upsilon x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(\upsilon x)^n n!}L_{2n}^{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\upsilon y^2}{4x}\right),\ \upsilon\to\infty \qquad (7)$$

где $K_0(z)$ - функция Макдональда, $H(x)$- единичная функция Хэвисайда, L_n^m - обобщенные полиномы Лагранжа.

Полученное выражение (4) отвечает полному асимптотическому разложению для описания двухмерного температурного поля, перемещающегося с высокой скоростью. Первый член разложения отвечает гипотезе Н.Н. Рыкалина [1]. Учет последующих членов дает возможность получения более точных приближенных описаний высокоскоростных полей. Явная форма первых двух членов разложения имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}e^{\frac{\upsilon}{2}x}K_0\left(\frac{\upsilon}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\approx\frac{H(x)\cdot e^{\frac{\upsilon y^2}{4x}}}{2\sqrt{\pi\upsilon x}}\cdot\left(1+\frac{1}{\upsilon x}\left(\frac{\upsilon y^2}{4x}\right)^2-\frac{\upsilon y^2}{4x}-\frac{1}{4}\right),\ \upsilon\to\infty \qquad (8)$$

Полученные приближенные представления (4) и (5) не являются единственным классом асимптотических разложений решений для высокоскоростных температурных полей в пространствах обобщенных функций.

Принимая в трансформанте Фурье фундаментального решения (3) в качестве определяющего при $\upsilon\to\infty$ представление $\tilde{\tilde{E}}\cong\frac{1}{i\upsilon u}$, запишем следующий ряд

$$\tilde{\tilde{E}}=\frac{1}{i\upsilon u+u^2+v^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left((iu)^2+(iv)^2\right)^2}{\upsilon^{k+1}(iu+0)^{k+1}},\qquad \upsilon\to\infty \qquad (9)$$

где обобщенная функция, отвечающая знаменателю k- го члена ряда (9), определяется следующим функционалом в пространстве основных функций $\varphi(\omega)$.

$$\left\langle(i\omega+0)^{-(k+1)},\varphi\right\rangle=\begin{cases}\int_0^{\infty}(i\omega)^{-(k+1)}(\varphi(\omega)+\varphi(-\omega)-2(\varphi(0)+\frac{\omega^2}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{\omega^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{k-1}(0)))d\omega\\ +\frac{(-i)^k\pi}{k!}\varphi^{(k)}(0),\ \textit{нечетное } k;\\ \int_0^{\infty}(i\omega)^{-(k+1)}(\varphi(\omega)-\varphi(-\omega)-2(\omega\varphi'(0)+\frac{\omega^3}{3!}\varphi'''(0)+\ldots+\frac{\omega^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{k-1}(0)))d\omega\\ +\frac{(-i)^k\pi}{k!}\varphi^{(k)}(0),\ \textit{четное } k.\end{cases} \qquad (10)$$

Развертывая числитель каждого члена ряда (9) по формуле бинома Ньютона

$$(iu)^2+(iv)^2)^k = \sum_{m=0}^{k} ({}^{k}_{m})\, (iu)^{2k-2m} (iv)^m , \tag{11}$$

проводя перемножения выражений (10) и (11), соответственно, для четных и нечетных членов формулы (10), получим для k - го члена ряда (9) следующее представление

$$\frac{\left((iu)^2+(iv)^2\right)^k}{\upsilon^{K+1}(iu+0)^{k+1}} = \frac{1}{\upsilon^{k+1}} \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \binom{k}{m} (iu)^{k-2m-1} (i\upsilon)^m + \sum_{m=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{k} \binom{k}{m} \frac{(iv)^m}{(iu+0)^{2m-k+1}} , \tag{12}$$

где $[z]$ означает целую часть z.

Обращая (12) по Фурье и суммируя результаты по k, получим следующее асимптотическое разложение

$$\frac{1}{2\pi} e^{\frac{\upsilon}{2}} K_0\left(\frac{\upsilon}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\upsilon^{k+1}} \cdot \left(\sum_{m=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \binom{k}{m} \delta^{(k-2m-1)}(x)\, \delta^{(2m)}(y) + H(x) \sum_{m=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{k} \binom{k}{m} \frac{x^{2m-k}}{(2m-k)!} \delta^{(2m)}(y) \right)$$

$$\upsilon \to \infty \tag{13}$$

Явная форма двух первых членов ряда (13) имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} e^{\frac{\upsilon}{2}} K_0\left(\frac{\upsilon}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) \approx \frac{1}{\upsilon} H(x)\,\delta(y) + \frac{1}{\upsilon^2}\left(\delta(x,y) + H(x)\, x\, \delta''(y)\right),\ \upsilon \to \infty \tag{14}$$

Сопоставление двух асимптотических решений (7) и (13) и их двухчленных представлений (8) и (14) выявляет их следующие свойства.

Приближенные решения (7) и (или 8) описываются обычными, классическими функциями, и их можно применять для расчета температур как от точечных, так и от распределенных источников тепла. При этом, однако, следует иметь ввиду, что в малой окрестности действия точечных источников тепла, точечное и приближенное решения будут сколь угодно сильно расходиться – точное решение имеет логарифмическую особенность в нуле, а асимптотическое – степенную.

С физической точки зрения асимптотическое представление отвечает нестационарному процессу теплопроводности в одномерном (по координате y) стержне при неучете кондуктивного теплопереноса по направлению x. Решение резко, экспоненциально убывает по координате y (в полосе $y = 0\left(\frac{1}{\upsilon_0}\right)$) и носит ярко выраженный характер пограничного слоя. С увеличением скорости υ и по мере удаления от теплоисточника по оси x точность приближенного описания увеличивается, т.е. оно является внешним асимптотическим разложением.

Разложения (13) и (или 14) существуют только в пространствах обобщенных функций. Пользоваться ими для описания температурных полей от быстродвижущихся точечных источников в обычном, классическом смысле принципиально невозможно, решения справедливы лишь в смысле соответствующих функционалов типа (10).

Такие решения эффективны для расчета температур от гладких распределенных теплоисточников в зоне их действия, т.е. они являются внутренними асимптотическими разложениями. Физически, первый член описания (14) отвечает неучету распространения тепла по обоим $-x$ и y- пространственным направлениям. Температура в этом случае определяется только теплоемкостью тела, и последующие члены разложения дают уточнения к такой предельной ситуации.

На основе изложенного подхода конструирования сингулярных асимптотических разложений для высокоскоростных температурных полей аналогично строятся приближенные решения для низкоскоростных полей при $\upsilon \to 0$.

Так представляя функцию Макдональда в (7) стандартным рядом Тейлора, запишем следующее разложение

$$\frac{1}{2\pi}e^{\frac{\upsilon}{2}x}K_0\left(\frac{\upsilon}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{e^{\frac{\upsilon}{2}x}}{2\pi}\left(\ln\upsilon+\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4}\right)+c+\sum_{n=0}^{\infty}\upsilon^{2n}\frac{\left(x^2+y^2\right)^n}{4^{2n}(n!)^2}\cdot\left(\ln\left(\frac{\upsilon\sqrt{x^2+y^2}}{4}-\psi(n+1\right)\right)\right)$$

$$\upsilon \to 0 \qquad (15)$$

где c-постоянная Эйлера и $\psi(z)$-пси функция

Выражения во внешних скобках в (15) отвечают разложению фундаментального решения в шкале функций $\ldots\ln\upsilon, 1, \upsilon^2\ln\upsilon, \upsilon^4\ln\upsilon, \upsilon^4\ldots$, асимптотической при $\upsilon \to 0$.
Коэффициенты при нечетных членах разложения равны

$$a_{2n+1}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^n}{4^n(n!)^2}\ , n=0,1,2\ldots \qquad (16)$$

и при четных

$$a_{2n+2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^n}{4^n(n!)^2}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{x^2}+y^2}{4}\right)-\psi(n+1)\right),\ \ n=0,1,2\ldots \qquad (17)$$

Разлагая экспоненту в левой части (15) в ряд Тейлора, получим асимптотическое разложение в шкале функций $\upsilon^n, n=0,1,2\ldots$,где коэффициенты разложения равны

$$b_n=\frac{x^n}{2^n n!},\quad n=0,1,2,\ldots \qquad (18)$$

Произведение двух асимптотических рядов с членами (16), (17) и (18) дает вновь асимптотический ряд. Шкалой функций для него при $\upsilon \to 0$ будет последовательность $\ldots\ln,1,\upsilon\ln\upsilon,\upsilon,\upsilon^2\ln\upsilon,\upsilon^2\ldots.$, в которой и представим асимптотическое разложение решения (15).

Выполняя умножение рядов с членами (16), (17), (18) и применяя формулу Ньютона, запишем в явной форме выражение для нечетных членов

$$c_n=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}a_{2m+1}\,b_{\frac{n-1}{2}-2m}\ , n=1,2,5 \qquad (19)$$

и для четных членов ряда

$$c_n = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{4}-1\right]} a_{2m+2}\, b_{\frac{n}{2}-2m-1}\,, n = 2, 4, 6 \qquad (20)$$

В соответствии с (19), (20) первые члены асимптотического разложения имеют вид

$$\frac{1}{2\pi} e^{\frac{\upsilon}{2}x} K_0\left(\frac{\upsilon}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) \approx -\frac{1}{2\pi}\left(\ln\upsilon + \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4}\right) + c + \frac{x}{2}\upsilon\ln\upsilon + \frac{x}{2}\left(\ln\left(\frac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{4}\right) + c\right)\upsilon \right) \quad (21).$$

Литература

1. Рыкалин Н.Н. Тепловые основы сварки. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947.С.273.

2. Дилигенский Н.В., Темников А.В., Девяткин А.Б., Слесаренко А.П. Современные методы математического моделирования теплопроводности в теплоэнергетике и машиностроении. Самара: СамГТУ, 1995, С. 335.

3. Дилигенский Н.В., Дымов Л.Г., Севастьянов П.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. М.:Машиностроение-1, 2004,С. 336.

4. Дилигенский Н.В., Ефимов А.П. Структура аппроксимационных решений нестационарных задач теплообмена в телах конечных размеров. Тр. III Минского Международного форума по тепло- и масообмену.Т9.Минск, ИТМО им. Лыкова, НАН Беларуси, 1996,С. 62-67.

5. Дилигенский Н.В., Ефимов А.П., Лившиц М.Ю. Применение метода возмущений для решения задачи Стефана в процессах промышленной теплофизики. Тр. IV Минского Международного форума по тепло- и масообмену.Т9.Минск, ИТМО им. Лыкова, НАН Беларуси, 2000, С.14-20.

6. Дилигенский Н.В., Ефимов А.П. Использование принципа дополнительности для конструирования систем математических моделей задач теплопроводности с требуемыми аппроксимативными свойствами. Тр. III-ей Российской национальной конференции по теплообмену.Т7.М.:МЭИ,2002,С.111-114.

7. Дилигенский Н.В., Лившиц М.Ю., Рапопорт Э.Я. Постановочные проблемы оптимального управления термодиффузионными процессами технологической теплофизики. Тр. IV-ой Российской национальной конференции по теплообмену.Т7.М.:МЭИ,2006,С.196-199.

8. Diligensky N.V. Methodology of monitoring and control over sustainable development of energy supply systems. EURO- ECO Internationaler Kongress Fachmesse «Okologische, Technologische und Rechtliche Aspekte der Lebensversorgung» EURO PAISCHE AKADEMIE DER NATUR WISSENSCHAFTEN Hannover, 2009, С.28-29.

9. Diligensky N.V., Efimov A.P. QUASI-ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF HEAT TRANSFER INVERSE PROBLEMS 6-th INTERNATIONAL CONFERENCE: Inverse Problems: Identification, *Design and Control,* Samara-Volgograd-Saratov-Ul΄yanovsk, 6-11 October, 2010, Russia, электронный ресурс, http:/www.cosmos.com. ru./6icip.

10. Дилигенский Н.В. Сингулярные модели управления объектами с распределенными параметрами. Материалы Всероссийской мультиконференции по проблемам управления МКПУ-2011, 3-8 мая 2011, Россия, Дивноморское, т.2, С.62-64.

11. Дилигенский Н.В., Ефимов А.П. Применение операторов дробного дифференцирования для построения аппроксимативных решений уравнения теплопроводности. Вестник Бурятского государственного университета”. № 9, 2011, С. 135-139.

12. Дилигенский Н.В., Ефимов А.П. Сингулярные модели передаточных и импульсных переходных функций распределенных объектов. «Известия Самарского научного центра Российской академии наук», 2011, Том 13 (6), С.94-99.