УДК 532.546:537.868

ИСТОЧНИКИ ТЕПЛА В ДВУХСЛОЙНЫХ СРЕДАХ ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

М.А.Фатыхов, Ф.А. Нагаев

Башкирский государственный педагогический университет им.М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

В работах [1, 2] описан экспериментально обнаруженный эффект, названный туннельной электромагнитной интерференцией, характерной особенностью которого является наличие незатухающего интерференционного потока энергии с амплитудой, пропорциональной мнимой части волнового вектора. Результатом этого эффекта является просветление диссипирующей среды при интерференции встречных электромагнитных волн (ЭМВ). Прохождение потока электромагнитной энергии через металлическую пластину, в определенной степени аналогична обычной интерференции в диэлектрических пластинках, однако оно оказывается бездиссипативной и обязано как бы эффекту интерференционного туннелирования.

В настоящей работе исследуется явление туннельной электромагнитной интерференции падающей и отраженной волн в диэлектрическом слое, возникающие за счет диссипации энергии волн. Рассмотрим распространение плоских электромагнитных волн в двухслойной поглощающей немагнитной среде ($0 < x < l$ и $l < x < \infty$) с комплексными значениями диэлектрической проницаемости $\varepsilon_i = \varepsilon_i' + i\varepsilon_i''$ $(i = 1{,}2)$. Будем считать, что ЭМВ падают под некоторым углом φ к границе раздела сред l. На поверхности раздела сред происходит частичное отражение падающей волны. С учетом типичных граничных условий на этой поверхности выражения для комплексных амплитуд электрического и магнитного полей в первой и второй средах можно представить в виде [3]

$$\dot{E}_1 = E_0 e^{-i\omega t}\left[e^{i\dot{k}_1 x} + \dot{\rho} e^{i\dot{k}_1(2l-x)}\right],\ \dot{H}_1 = \frac{E_0}{\dot{Z}_1} e^{-i\omega t}\left[e^{i\dot{k}_1 x} - \dot{\rho} e^{i\dot{k}_1(2l-x)}\right],$$

$$\dot{E}_2 = E_0 e^{-i\omega t}\dot{\tau} e^{i(\dot{k}_1-\dot{k}_2)l + i\dot{k}_2 x},\ \dot{H}_2 = \frac{E_0}{\dot{Z}_2} e^{-i\omega t}\dot{\tau} e^{i(\dot{k}_1-\dot{k}_2)l + i\dot{k}_2 ч}, \tag{1}$$

В первой и во второй области комплексные коэффициенты Френеля на поверхности $x = l$ связаны соотношениями [3]

$$\dot{\tau} = 1 + \dot{\rho},$$

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{Z}_2\cos\varphi - \dot{Z}_1\cos\theta}{\dot{Z}_2\cos\varphi + \dot{Z}_1\cos\theta},\ \ \dot{\tau} = \frac{2\dot{Z}_2\cos\varphi}{\dot{Z}_2\cos\varphi + \dot{Z}_1\cos\theta}, \tag{2}$$

$$\dot{Z}_i = Z_0\sqrt{\frac{1}{\dot{\varepsilon}_i}},\quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}},\quad \dot{k}_i = \beta_i + i\alpha_i,\quad \beta_i = \frac{\bar{k}_i}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{\cos\delta_i}},\quad \alpha_i = \frac{\bar{k}_i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\cos\delta_i} - 1},$$

$$\bar{k}_i = \frac{\omega}{\vartheta_0}\sqrt{\varepsilon_i'},\ \ \delta_i = arctg\frac{\varepsilon_i''}{\varepsilon_i'},\ \ \vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Следует заметить, что подобная задача решена в работе [4 - 6] для случая нормального падения электромагнитных волн к границе раздела сред.

Для получения зависимостей потока электромагнитной энергии P и плотности тепловых источников Q от угла падения φ, следует в (2) выразить угол преломления θ через φ $(\theta = f(\varphi))$. Известно, что синусы угла преломления θ и угла падения φ подчинены соотношению:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}, \tag{3}$$

С точки зрения электродинамики этот закон – следствие уравнений Максвелла, причем $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$

для всякой среды с данными проницаемостями. В нашем случае $\dot{n}_i = \sqrt{\dot{\varepsilon}_i}$. Подставляя последнее выражение в (3), имеем:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{\dot{\varepsilon}_1}}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_2}}.$$

Из (2) следует, что, $\frac{\sqrt{\dot{\varepsilon}_1}}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_2}} = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1} = \dot{Z}_{21}$ следовательно, выражение (3) перепишется в виде $\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \dot{Z}_{21}$. После некоторых преобразований, имеем

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2), получим комплексные коэффициенты Френеля в виде:

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{Z}_{21}\cos\varphi - \sqrt{1 - \left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi}}{\dot{Z}_{21}\cos\varphi + \sqrt{1 - \left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi}},\ \dot{\tau} = \frac{2\dot{Z}_{21}\cos\varphi}{\dot{Z}_{21}\cos\varphi + \sqrt{1 - \left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi}}. \tag{5}$$

Поток электромагнитной энергии определяется средним значением комплексного вектора Пойнтинга

$$P = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\dot{E}\dot{H}^*\right] \tag{6}$$

Подставляя (1) в (6), после некоторых преобразований, имеем:

$$P_1 = \frac{E_0^2\cos\left(\frac{\delta_1}{2}\right)}{2\left|\dot{Z}_{21}\right|}[e^{-2\alpha_1 x} + \frac{2e^{-2\alpha_1 l}tg\left(\frac{\delta_1}{2}\right)}{\left|\dot{Z}_{21}\cos\varphi + \sqrt{1 - \left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi}\right|^2}[\left(\left|\dot{Z}_{21}\right|^2 - 1\right)\sin\left(2\beta_1(x-l)\right) +$$

$$+ 2\left|\dot{Z}_{21}\right|\sin\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}\right)\cos\varphi\sqrt{1 - \left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi}\cos\left(2\beta_1(x-l)\right)] - \left|\frac{\dot{Z}_{21}\cos\varphi - \sqrt{1 - \left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi}}{\dot{Z}_{21}\cos\varphi + \sqrt{1 - \left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi}}\right|^2 \times$$

$$\times e^{-2\alpha_1(2l-x)}] = P_1^+ + P_1^\pm + P_1^-,$$

$$P_2 = \frac{E_0^2 \left|\dot{Z}_{21}\right| \cos\varphi}{\left|\dot{Z}_2\right| \left|\dot{Z}_{21}\cos\varphi + \sqrt{1-\left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi}\right|^2} \left(\left|\dot{Z}_{21}\right| \cos\varphi \cos\left(\frac{\delta_1}{2}\right) + \cos\left(\delta_2 - \frac{\delta_1}{2}\right) \sqrt{1-\left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi} \right) \times$$

$$\times e^{-2l(\alpha_1-\alpha_2)-2\alpha_2 x}. \qquad (7)$$

Из (7) следует, что при отражении ЭМВ от границы раздела поглощающих сред, в первой среде образуется незатухающий и осциллирующий по координате интерференционный поток энергии $P^{\pm}$. Этот поток существует и тогда, когда вторая среда прозрачная $(\delta_2 = 0)$, однако он исчезает, если первая среда является прозрачной, т.е. $\delta_1 = 0$. Примечательно еще следующее обстоятельство. Если на поверхности l ввести, как это принято, энергетические коэффициенты отражения и преломления по формулам

$$H = \left|\dot{\rho}\right|^2 = \frac{P_1^-}{P_1^+} \text{ и } T = \left|\dot{\tau}\right|^2 = \frac{P_2}{P_1^+},$$

то следует, что в рассматриваемом случае $H + T > 1$, а именно

$$H + T = 1 + \frac{P_1^{\pm}}{P_1^+} = 1 + \frac{4\left|\dot{Z}_{21}\right| \cos\varphi \sqrt{1-\left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi} \left[\cos\left(\frac{\delta_2}{2}\right) - \cos\left(\frac{\delta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \right]}{\left|\dot{Z}_{21}\cos\varphi + \sqrt{1-\left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi}\right|^2}$$

Отсюда видно, что $H + T = 1$, только тогда, когда первая среда прозрачная $(\delta_1 = 0)$. Отметим, что в курсах электродинамики этот факт, как правило, не уточняется, что приводит иногда к недоразумениям.

Плотность тепловых источников за счет диссипации энергии ЭМВ определяется известным соотношением

$$Q = -\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad (8)$$

Из выражений (7) и (8) следует

$$Q_1 = K[-2\alpha_1 e^{-2\alpha_1 x} + A[B\cos(2\beta_1(x-l)) + C\sin(2\beta_1(x-l))] - De^{-2\alpha_1(2l-x)}],$$

$$Q_2 = \frac{2\alpha_2 E_0^2 \left|\dot{Z}_{21}\right| \cos\varphi}{\left|\dot{Z}_{21}\cos\varphi + \sqrt{1-\left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi}\right|^2 \left|\dot{Z}_2\right|} \left(\left|\dot{Z}_{21}\right| \cos\left(\frac{\delta_2}{2}\right) \cos\varphi + \cos\left(\delta_2 - \frac{\delta_1}{2}\right) \sqrt{1-\left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi} \right) \times$$

$$\times e^{-2l(\alpha_1-\alpha_2)-2\alpha_2 x},$$

$$\text{где } K = -\frac{E_0^2 \cos\left(\frac{\delta_1}{2}\right)}{2\left|\dot{Z}_1\right|},\; A = \frac{2e^{-2\alpha_1 l} tg\left(\frac{\delta_1}{2}\right)}{\left|\dot{Z}_{21}\cos\varphi + \sqrt{1-\left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi}\right|^2},\; B = 2\beta_1(\left|\dot{Z}_{21}\right|^2 - 1), \qquad (9)$$

$$C = 4\beta_1\left|\dot{Z}_{21}\right| \sin\left(\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\right)\cos\varphi\sqrt{1-\left|\dot{Z}_{21}\right|^2 \sin^2\varphi},\; D = 2\alpha_1\left|\frac{\dot{Z}_{21}\cos\varphi - \sqrt{1-\left|\dot{Z}_{21}\right|^2\sin^2\varphi}}{\dot{Z}_{21}\cos\varphi + \sqrt{1-\left|\dot{Z}_{21}\right|^2\sin^2\varphi}}\right|^2.$$

В работе представлены результаты численных исследований зависимостей (9) при широком наборе параметров.

Рассматривается двухслойная среда в двух случаях:

а) в области I $(0 < x < l)$ находится вода, в области II $(l < x < \infty)$ - водонасыщенная пористая среда.

б) в области I - водонасыщенная пористая среда, в области II находится вода.

При этом принимались следующие значения параметров:

$\varepsilon_1' = 77$; $tg\delta_1 = 0{,}06$; $\varepsilon_2' = 4$; $tg\delta_2 = 10^{-5}$.

Индексы 1 и 2 относятся соответственно к воде и материалу матрицы пористой среды.

В случае *а*) $\begin{aligned}&\varepsilon_I' = \varepsilon_1'; tg\delta_I = tg\delta_1;\\ &\varepsilon_{II}' = \varepsilon_1' m + (1-m)\varepsilon_2'; tg\delta_{II} = m tg\delta_1 + (1-m) tg\delta_2.\end{aligned}$

В случае *б*) $\begin{aligned}&\varepsilon_I' = \varepsilon_1' m + (1-m)\varepsilon_2'; tg\delta_I = m tg\delta_1 + (1-m) tg\delta_2;\\ &\varepsilon_{II}' = \varepsilon_1'; tg\delta_{II} = tg\delta_1.\end{aligned}$

m – коэффициент пористости. α и β - коэффициенты поглощения ЭМВ и волновое число, определяются по следующим формулам:

$$\alpha_I = \frac{\bar{k}_I}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\cos\delta_I} - 1};\; \alpha_{II} = \frac{\bar{k}_{II}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\cos\delta_{II}} - 1};\; \beta_I = \frac{\bar{k}_I}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\cos\delta_I} + 1};\; \beta_{II} = \frac{\bar{k}_{II}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\cos\delta_{II} + 1}};$$

где $\cos\delta_I = \sqrt{\frac{1}{tg^2\delta_I + 1}}$; $\cos\delta_{II} = \sqrt{\frac{1}{tg^2\delta_{II} + 1}}$; $\bar{k}_I = \frac{\omega}{\vartheta_0}\sqrt{\varepsilon_I'}$; $\bar{k}_{II} = \frac{\omega}{\vartheta_0}\sqrt{\varepsilon_{II}'}$. Частота ω определялась из формулы $\omega = 2\pi f$, где $f = 915$ МГц, скорость ЭМВ в вакууме $\vartheta_0 = 3\cdot 10^8$ м/с. А также при этом принимались $E_0 = 10^5$ В/м, $Z_0 = 120\pi$ Ом, $l = 0{,}1$ м.

В случае *а* первая среда $(0 < x < l)$ - оптически более плотная. Из (3) следует, что угол преломления θ в данном случае больше угла падения φ. Следовательно, при некотором остром угле $\varphi = \varphi^*$, который называется *предельным углом внутреннего отражения*, окажется, что угол θ - прямой. Преломленный луч при этом как бы скользит вдоль границы раздела сред l. Полагая в (2.4) $\theta = 90^\circ$, для $\varphi = \varphi^*$ получаем $\sin\varphi^* = \frac{1}{\left|\dot{Z}_{21}\right|}$.

При дальнейшем увеличении угла падения $(\varphi > \varphi^*)$ $\sin\theta > 1$. Это значит, что углам φ, лежащим в пределах $\varphi^* < \varphi < 90^\circ$, не соответствуют какие-либо вещественные θ: преломленного луча нет, происходит *полное отражение*.

Очевидно, что угол φ^* зависит от $\left|\dot{Z}_{21}\right|$, а $\left|\dot{Z}_{21}\right|$ - от коэффициента пористости m второй среды. Следовательно, в случае большей оптической плотности первой среды ($\left|\dot{Z}_{21}\right| > 1$) областью определения функции $\theta(\varphi)$ будет решение системы из трех неравенств

$$\begin{cases} \varphi \le \arcsin\left(\dfrac{1}{\left|\dot{Z}_{21}\right|}\right) \\ 0^\circ \le \varphi \le 90^\circ \\ 0 < m < 1 \end{cases} \tag{10}$$

Как видно из рис. 1, относительный волновое сопротивление сред $\left|\dot{Z}_{21}\right|$с увеличением значения коэффициента пористости m быстро убывает. Между тем, при этом предельный угол внутреннего отражения φ^* возрастает (рис. 2). Данные рис. 1 и 2 характеризуют случай *a*. Очевидно, что решением системы неравенств (10) будет являться область, ограниченная кривой $\varphi^*(m)$ и осью абсцисс m. Это значит, что для получения численных расчетов по формулам (7) и (9) в случае *a*, целесообразно вводить те значения угла падения ЭМВ на границу раздела сред l, которые лежат в пределах $0 \le \varphi(m) \le \varphi^*(m)$.

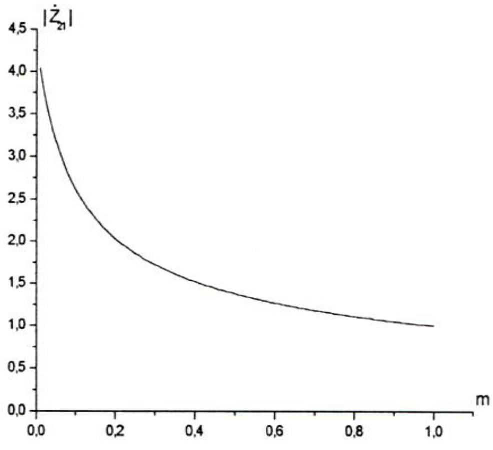


Рис.1. Зависимость относительного волнового сопротивления сред от пористости

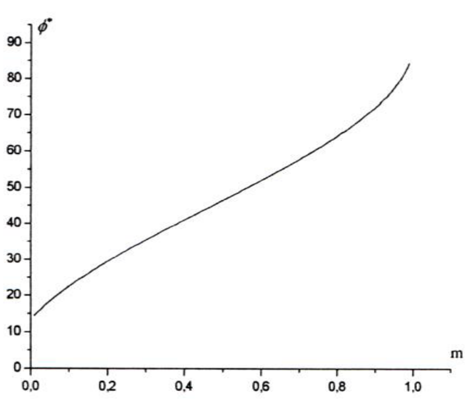
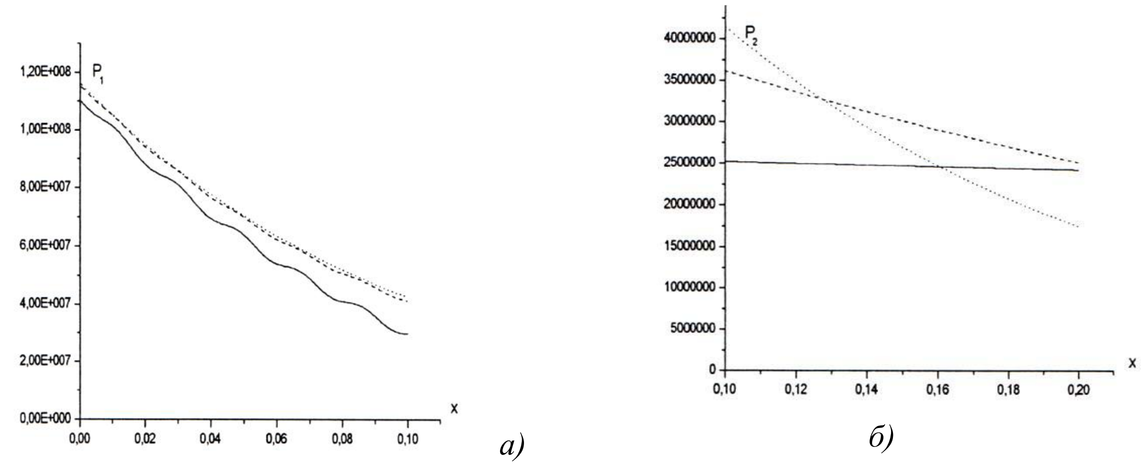


Рис.2. Зависимость предельного угла отражения волны от пористости

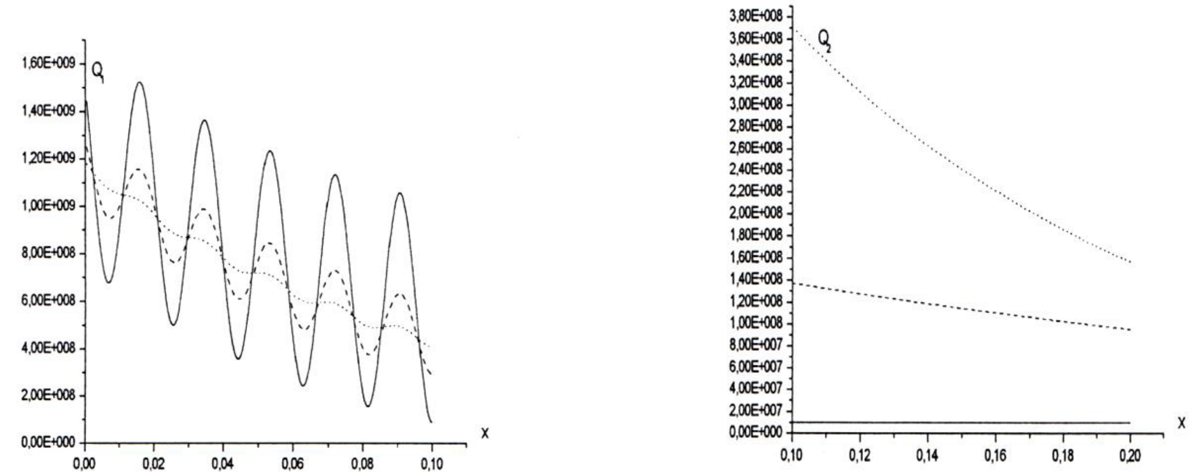
Для случая *б*, когда вторая среда оптически более плотная, угол преломления θ меньше угла падения φ $(\theta < \varphi)$, т. е. для любых φ из $0 < \varphi < 90^\circ$ соответствуют вещественные θ. Поэтому для численных расчетов можно вводить любые значения φ.

Из рис. 3, *а* следует, что в первой среде возникает осциллирующий с расстоянием поток электромагнитной энергии. С увеличением значения m величина модуля вектора Пойнтинга P_1 возрастает, вместе с тем, уменьшается амплитуда ее осцилляций. Возникающий в первой среде интерференционный поток электромагнитной энергии является незатухающим. Во второй среде модуль вектора Пойнтинга P_2 убывает по экспоненциальному закону (рис. 3, *б*). Видно, что большему значению m соответствует наибыстрейшее убывание P_2 (пунктирная кривая расположена круче). Распределение плотности тепловых источников Q_1 в первой среде, как и P_1, имеет волнообразный характер (рис. 4, *а*). С увеличением значения m амплитуда осцилляций Q_1 уменьшается. Во второй среде плотность тепловых источников Q_2 убывает по экспоненциальному закону. Однако, в случае большего значения m (пунктирная кривая) проявляется сильное убывание (рис. 4, *б*)



а) *б)*

Рис. 3. Изменение модуля вектора Пойнтинга с расстоянием в первой *(а)* и во второй *(б)* средах при различных коэффициентах пористости m: сплошная линия – 0,1; штриховая – 0,5; пунктирная – 0,9. $\varphi = 15^\circ$.

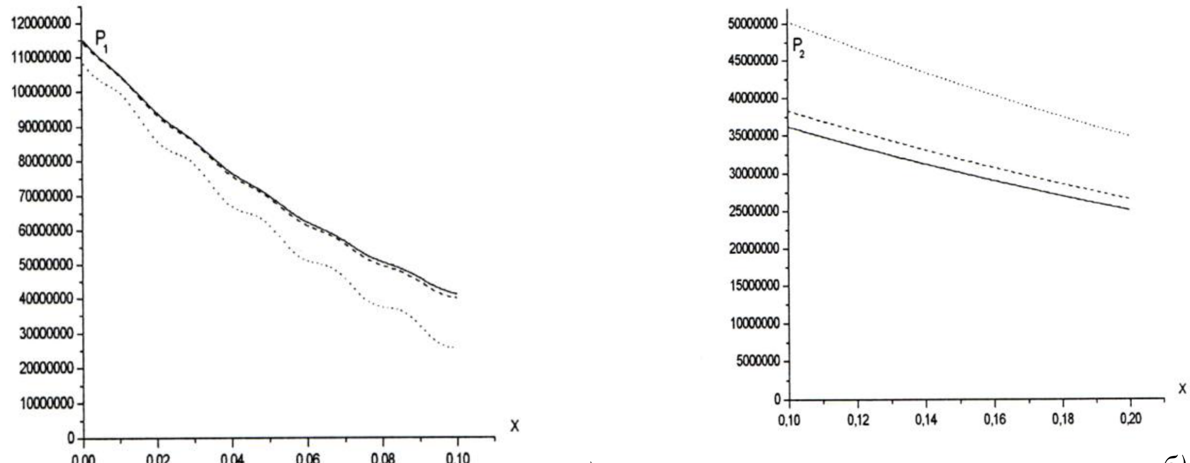


а) *б)*

Рис. 4. Изменение плотности источников тепла с расстоянием. Обозначения соответствуют рис.3.

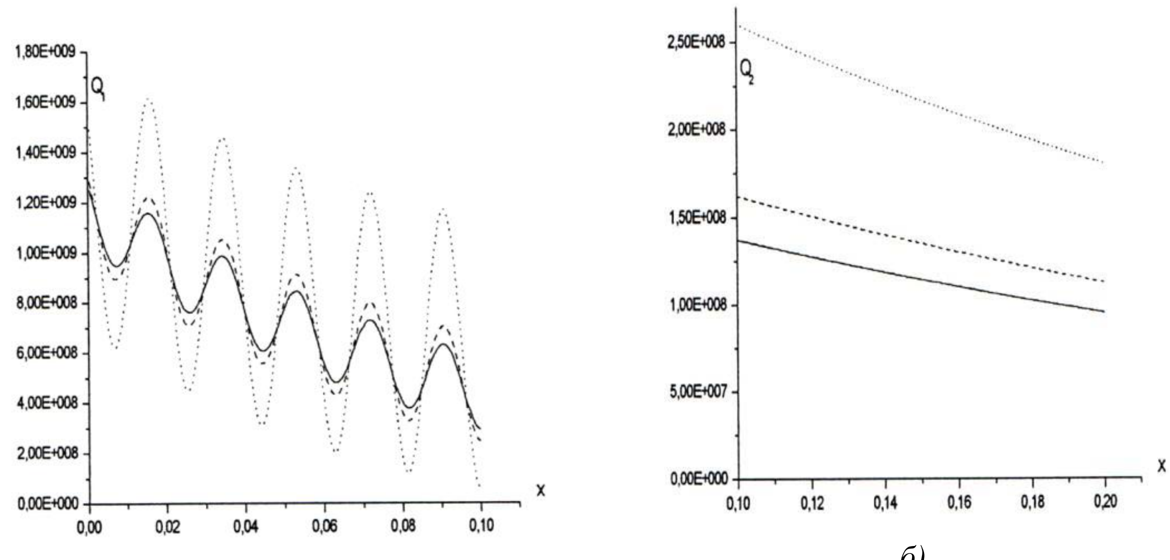
Интересны результаты исследований модуля вектора Пойнтинга P и плотности тепловых источников Q в зависимости от расстояния при различных значениях угла падения φ ЭМВ на границу раздела сред

Из рис. 5, *а* видно, что в первой среде с увеличением угла падения φ убывает значение вектора Пойнтинга P_1, но при этом возрастает амплитуда осцилляций P_1. Во второй среде большему значению φ соответствует большее значение P_2 (рис. 5, *б*). Рис. 6, *а* показывает, что в первой среде с увеличением значения φ увеличивается амплитуда осцилляций плотности тепловых источников Q_1. Во второй среде наибольшему значению φ соответствует наибольшее значение плотности тепловых источников, причем Q_2 убывает экспоненциально (рис. 6, *б*).



а) *б)*

Рис. 5. Изменение модуля вектора Пойнтинга с расстоянием в первой *(а)* и во второй *(б)* средах при различных углах падения ЭМВ φ : сплошная линия – $\varphi = 15^\circ$; штриховая – $\varphi = 30^\circ$; пунктирная – $\varphi = 45^\circ$ (m=0,5).

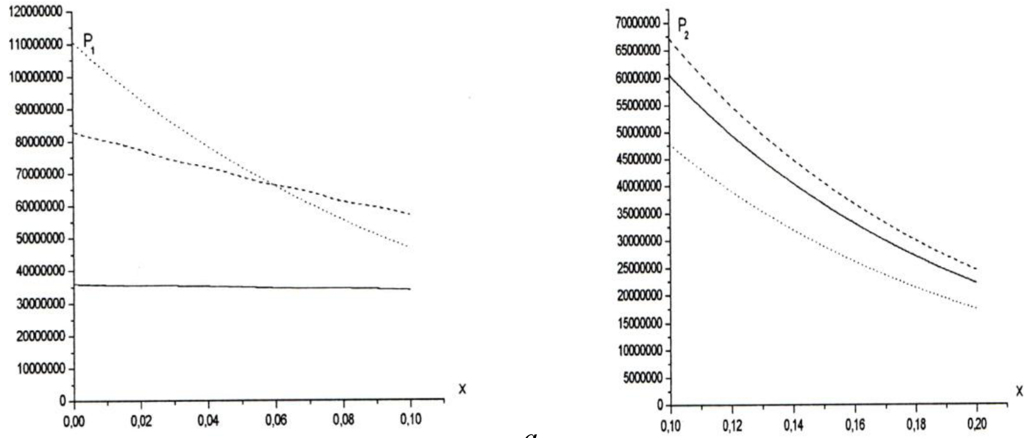


б)

а)

Рис. 6. Изменение плотности источников тепла с расстоянием. Обозначения соответствуют рис.5.

На рис. 7-10 представлены результаты исследований P и Q в зависимости от координаты x для случая *б*.

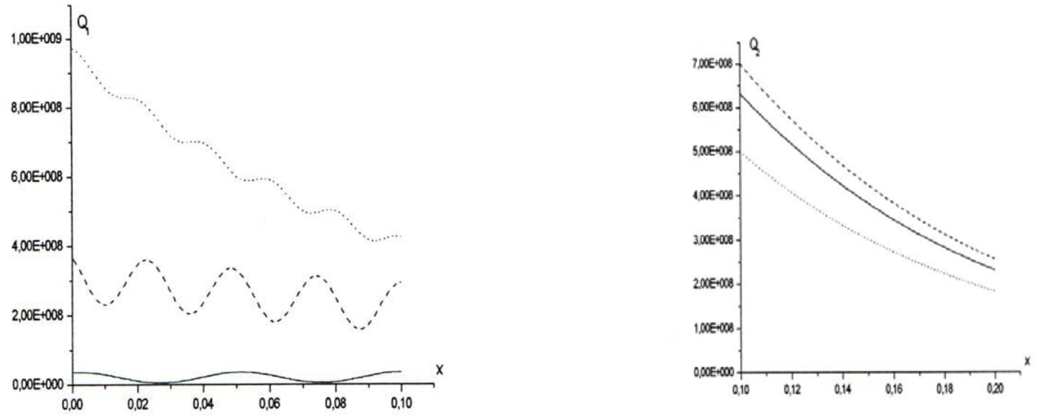


а

б)

)

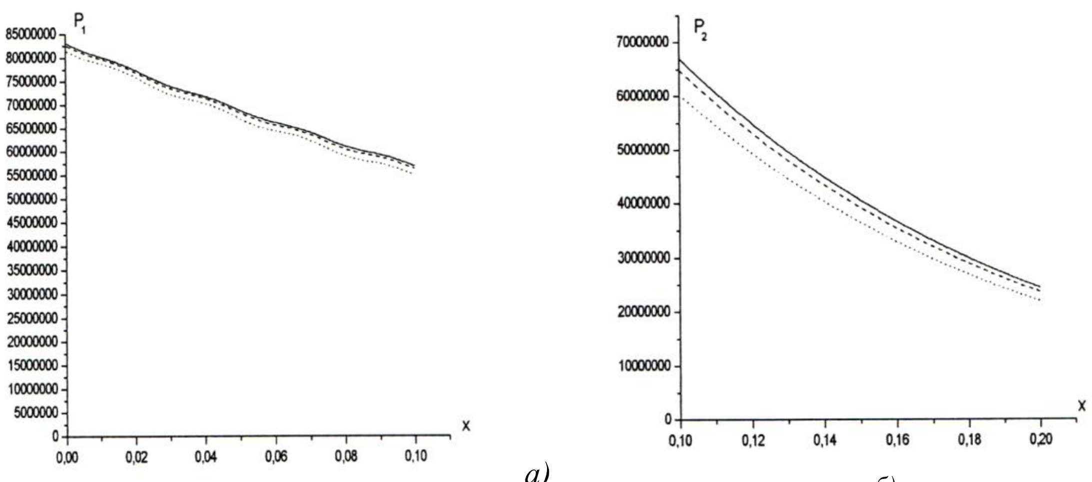
Рис. 7. Изменение модуля вектора Пойнтинга с расстоянием в первой *(а)* и во второй *(б)* средах при различных коэффициентах пористости m: сплошная линия – 0,1; штриховая – 0,5; пунктирная – 0,9. $\varphi = 15^{\circ}$.



а)

б)

Рис. 8. Изменение плотности источников тепла с расстоянием. Обозначения соответствуют рис.7.

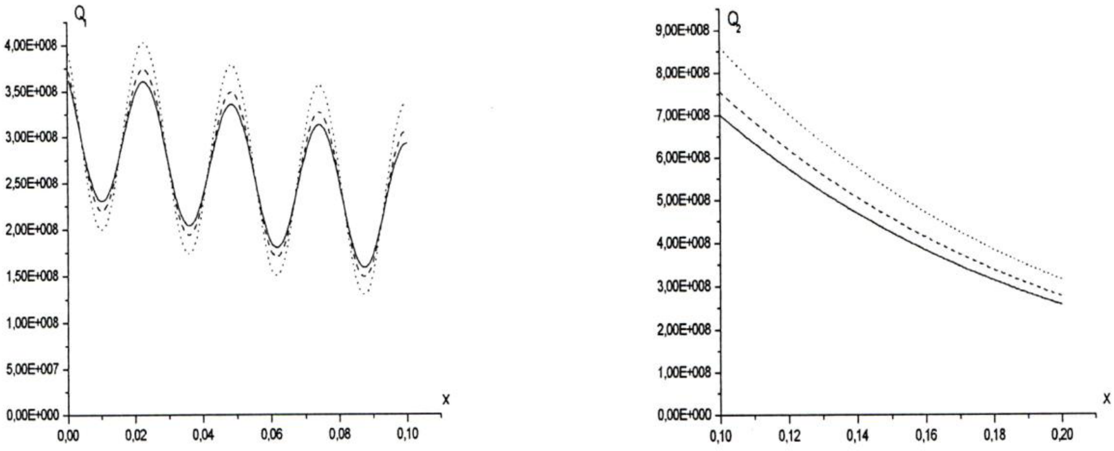


а)

б)

Рис. 9. Изменение модуля вектора Пойнтинга с расстоянием в первой *(а)* и во второй *(б)* средах при различных углах падения ЭМВ φ : сплошная линия – $\varphi = 15^{\circ}$; штриховая – $\varphi = 30^{\circ}$; пунктирная –

$\varphi = 45^{\circ}$ (m=0,5).



а) *б)*

Рис. 10. Изменение плотности источников тепла с расстоянием. Обозначения соответствуют рис.9.

Из рис. 7, *а* видно, что в первой среде вектор Пойнтинга P_1 убывает, как и в случае *а* (см. рис. 3, *а*). Однако, в случае *б* осцилляции P_1 более слабые. При значении m=0,5 возникает наибольшая амплитуда осцилляций. Наибольшему значению m соответствует наиболее сильное убывание P_1 (пунктирная кривая расположена круче). Во второй среде вектор Пойнтинга P_2 убывает экспоненциально (рис. 7, *б*). С увеличением значения m P_2 возрастает до некоторого максимального значения и убывает. Это говорит о том, что во второй среде зависимость P_2(m) нелинейная. Как следует из рис. 8, *а*, с увеличением m значение плотности тепловых источников Q_1 возрастает, при этом, как и для вектора Пойнтинга P_1 (см. рис. 7, *а*), наибольшая амплитуда осцилляций Q_1 соответствует значению m=0,5. Следует отметить, что и здесь зависимость Q_2(m) нелинейная (рис. 8, *б*).

Рис. 9,*а* свидетельствует о том, что с увеличением значения φ значение вектора Пойнтинга P_1 убывает, но не сильно. На амплитуду осцилляций изменение угла падения φ влияет слабо. Во второй среде, в отличие от случая *а* (см. рис. 5*, б),* с увеличением угла падения φ значение вектора Пойнтинга P_2 убывает (рис. 9*, б*). Между тем, с увеличением φ амплитуда осцилляций плотности тепловых источников Q_1 увеличивается, но это увеличение происходит плавно, нежели в случае *а* (рис.6 , *а*). Во второй среде, как и в случае *а* (см. рис. 6, *б*), с увеличением значения φ значение плотности тепловых источников Q_2 возрастает (рис. 10, *б).*

Обозначения

$\dot{E}_i, \dot{H}_i$ - комплексные напряженности электрического (В/м) и магнитного полей (А/м), $i = 1$ и $i = 2$ - первая и вторая среды, l - граница раздела сред, $\dot{Z}_1$ и $\dot{Z}_2$, $\dot{k}_1$ и $\dot{k}_2$ - комплексные волновые сопротивления (Ом) и волновые вектора (1/м), φ - угол падения электромагнитных волн на границу раздела двух сред, (рад); θ - угол преломления, рад; ε_0, μ_0 - электродинамические постоянные, Ф/м и Гн/м соответственно; E_0 - амплитуда электрического поля при $x = 0$, n_1 и n_2 - коэффициенты преломления сред, n_{12} - относительный коэффициент преломления, Q – интенсивность распределенных источников тепла, Вт/м^3; P – модуль вектора Пойнтинга, Вт/м^2; H и T - коэффициенты отражения и преломления волн, x – расстояние, м.

Литература

1. Сидоренков В.В., Толмачев В.В. Просветление диссипирующей среды при интерференции встречных электромагнитных волн //Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, Вып. 21. С. 34 – 36.

2. Сидоренков В.В., Толмачев В.В. Просветление диссипирующей среды при интерференции встречных электромагнитных волн //Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16, Вып. 20. С. 5 – 8.

3. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989. 544 с.

4. Некрасов Л.Б., Рикенглаз Л.Э. Отражение энергии электромагнитного поля от полубесконечной диэлектрической среды при наличии в среде фазового перехода //ЖТФ. 1972. Т. 42. Вып. 7. С. 1339 – 1342.

5. Семенцов Д.И., Ефимов В.В. Диссипация энергии в условиях интерференции встречных волн в поглощающем слое //ЖТФ. 1997. Т. 67. № 2. С. 118 – 120.

6. Хабибуллин И.Л. Электромагнитная термогидродинамика поляризующихся сред Уфа: Изд. Башкирск. Ун – та, 2000. 246 с.