

## НАХОЖДЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ПЕРВОГО ПЕРИОДА СУШКИ МЕТОДОМ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Г.И. Ефремов

*Московский государственный открытый университет, г. Москва, Россия*

В задачах описания кинетики сушки (изменение среднего влагосодержания от времени) требуется построить соответствующую математическую модель и найти численные значения параметров этой модели. В качестве исходных данных для построения модели часто служат результаты эксперимента, который представляет собой совокупность нескольких измерений, выполненных по определённому плану. В простейшем случае план является описанием условий проведения измерений, то есть значений входных параметров (факторов).

Основная цель планирования эксперимента – достижение максимальной точности для искомого уравнения регрессии при минимальном количестве проведенных опытов и сохранении статистической достоверности полученных результатов.

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) предполагает совокупность выполнения нескольких экспериментов, причем количество измерений составляет  $2^n$  ( $n$  – количество факторов), каждый фактор принимает только два значения – верхнее и нижнее и эти значения факторов комбинируются во всех возможных сочетаниях.

Для иллюстрации систем, оценка параметров которых актуальна с практической точки зрения, может служить расчет температурной зависимости для первого периода сушки, имеющего место в «мягком» режиме конвективной сушки материала [1]. Кинетика сушки в 1-м периоде описывается линейной зависимостью влагосодержания материала  $w$ , (кг влаги/кг сухого материала) от времени процесса  $\tau$  [1,2]. На Рис. 1 представлен пример такой зависимости для двух температур сушильного агента  $t_1$  и  $t_2$ . Для получения математического описания такого процесса сушки может быть использован план 1-го порядка [3].

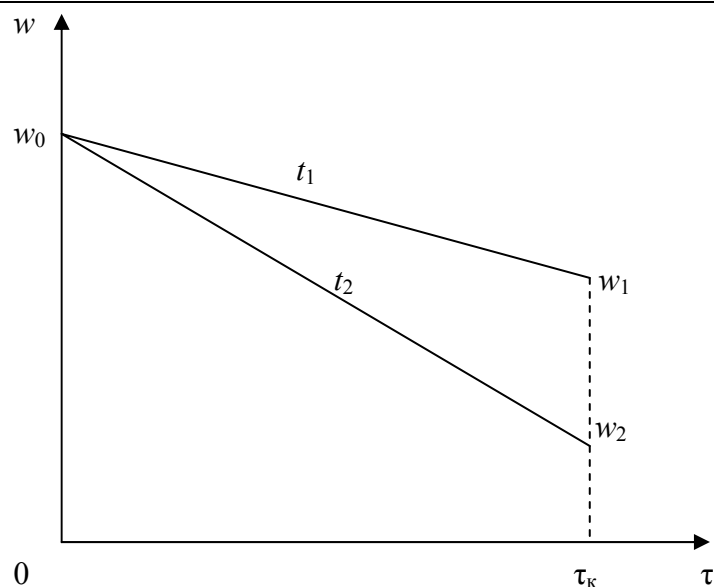


Рис. 1. Зависимость среднего влагосодержания материала  $w$  от времени  $\tau$  в первом периоде сушки для двух температур.

Рассмотрим сначала решение в общем виде. Процесс конвективной сушки материала при постоянной скорости сушильного агента зависит от двух параметров: температуры горячего воздуха  $t$  и времени процесса  $\tau$ . Необходимое число опытов ПФЭ составит  $2^2 = 4$ .

Значение температуры воздуха в центре плана обозначим  $t_0$ , интервал варьирования  $\delta_1$ . Соответственно для времени процесса -  $\tau_0$  и  $\delta_2$ . Будем описывать кинетику сушки от начального влагосодержания  $w_0$  (при  $\tau = 0$ ) до конечных значений  $w_1$  и  $w_2$ , соответствующих минимальному и максимальному значениям температуры сушильного агента  $t_1$  и  $t_2$ , соответственно (Рис. 1).

Матрица ПФЭ кодированных переменных для двух факторов с учетом их двойного взаимодействия записывается [3] следующим образом

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$y$
+	-	-	+	$y_0$
+	+	-	-	$y_0$
+	-	+	-	$y_1$
+	+	+	+	$y_2$

Рис. 2. Матрица планирования ПФЭ для двух влияющих факторов.

Соответствующее уравнение регрессии имеет вид

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2. \quad (1)$$

Коэффициенты уравнения регрессии рассчитываются [3] по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^4 x_i y_j}{4}. \quad (2)$$

Тогда, с учетом параметров матрицы планирования в нашем случае получим

$$b_0 = \frac{y_0 + y_0 + y_1 + y_2}{4} \quad b_1 = \frac{-y_1 + y_2}{4} \quad b_2 = \frac{-y_0 - y_0 + y_1 + y_2}{4} \quad b_3 = \frac{-y_1 + y_2}{4}.$$

Подставим значения коэффициентов в уравнение регрессии (1)

$$4y = (y_0 + y_0 + y_1 + y_2) + (-y_1 + y_2)x_1 + (-y_0 - y_0 + y_1 + y_2)x_2 + (-y_1 + y_2)x_1x_2. \quad (3)$$

После преобразований, с учетом перехода от кодированных переменных к исходным  $x_1 = \frac{t-t_0}{\delta_1}$ ,  $x_2 = \frac{\tau-\tau_0}{\delta_2}$ ,  $y_0 = w_0$ ,  $y_1 = w_1$ ,  $y_2 = w_2$ , причем  $\tau_0 = \delta_2$ , окончательно получим обобщенное уравнение регрессии для процесса сушки в 1-м периоде в конечном виде

$$w = w_0 - \frac{2w_0 - w_1 - w_2}{4} \cdot \frac{\tau}{\delta_2} - \frac{w_1 - w_2}{4} \cdot \frac{t-t_0}{\delta_1} \cdot \frac{\tau}{\delta_2}. \quad (4)$$

При анализе уравнения (4) следует отметить, что влияние температуры на процесс сушки учитывает только последний член уравнения, отражающий двойное взаимодействие влияющих факторов.

В качестве примера применения полученного на основе метода планирования эксперимента уравнения регрессии, рассмотрим конкретное описание 1-го периода

конвективной сушки хлопчатобумажной ткани при двух температурах 48 и 83 °С за время сушки в 1-м периоде 18 минут. Начальное среднее влагосодержание материала принято  $w_0 = 1.09$  (кг влаги/кг сух. материала). Указанные исходные данные для ПФЭ представлены ниже в форме таблицы 1.

Таблица 1.

Исходные данные ПФЭ для процесса сушки хлопчатобумажной ткани

Переменные процесса	Min (-)	Max (+)	В центре плана	Интервал варьирования ( $\delta$ )
Температура $t$ , °С	48	83	65.5	17.5
Время $\tau$ , мин	0	18	9	9

Согласно матрице ПФЭ кодированных переменных (Рис. 2) первые 2 опыта соответствуют исходному состоянию материала ( $\tau = 0$  и влагосодержание  $w_0$ ). Таким образом, необходимо выполнить только 2 оставшихся опыта при  $\tau = 18$  мин для двух температур 48 и 83 °С. Найденные после проведения опытов значения влагосодержаний составили соответственно  $w_1 = 0.65$  и  $w_2 = 0.1$  (приведены ниже в матрице ПФЭ, рис.3).

$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_1 X_2$	$y$
+	-	-	+	1.09
+	+	-	-	1.09
+	-	+	-	0.65
+	+	+	+	0.1

Рис. 3. Матрица планирования ПФЭ для двух сушки хлопчатобумажной ткани.

Подставим приведенные в матрице (Рис.3) значения влагосодержаний в общее уравнение регрессии для процесса сушки в 1-м периоде (4), в результате получим

$$w = 1.09 - \frac{2 \cdot 1.09 - 0.65 - 0.1}{4} \cdot \frac{\tau}{9} - \frac{0.65 - 0.1}{4} \cdot \frac{t - 65.5}{17.5} \cdot \frac{\tau}{9}. \quad (5)$$

После преобразований имеем уравнение кинетики в виде

$$w = w_0 + 0.01746 \cdot \tau - 0.000873 \cdot t \cdot \tau. \quad (6)$$

Следует отметить, что влияние температуры на процесс сушки учитывается только членом двойного взаимодействия факторов в уравнении регрессии.

Дифференцируя уравнение (6) по времени получим зависимость для скорости процесса, отражающее линейную температурную зависимость для скорости процесса сушки

$$\frac{dw}{d\tau} = 0.01746 - 0.000873 \cdot t. \quad (7)$$

Скорость процесса сушки в общем виде в первом периоде определяется количеством подводимой теплоты и пропорциональна движущей силе процесса ( $t - t_M$ ) – разности температур сухого и мокрого термометров и обратно пропорциональна теплоте испарения  $r$  [2, 4]

$$N = \frac{dw}{d\tau} = -\frac{\alpha \cdot F}{\rho \cdot v} \cdot \frac{t - t_m}{r} \quad (8)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $F$ ,  $\rho$ ,  $v$  – коэф. теплоотдачи, поверхность испарения, плотность и скорость теплоносителя, соответственно.

Выполнено также сравнение расчета по полученному уравнению регрессии (6) с проведенными ранее Филоненко Г.К. экспериментами по кинетике сушки хлопчатобумажной ткани в 1-м периоде для четырех температур [5]. Значения этих температур и соответствующие им обозначения опытных точек (рис. 4) приведены в таблице 2. Значение минимальной температуры 48 °С и начальное среднее влагосодержание материала  $w_0 = 1.09$  были теми же, что и в приведенных выше расчетах. Артикул хлопчатобумажной ткани тоже совпадал.

Таблица 2.

Температуры и обозначение опытных данных [5], приведенных на Рис. 4.

Температура t, °С	48	56.3	70	83.5
Обозначение опытных точек	+	□	◇	×

Линии процесса сушки хлопчатобумажной ткани на рис. 4 построены по уравнению (6) для указанных в таблице 2 четырех значений температур. На рис. 4 приведены также три жирных квадрата, нанесенных в соответствии с планом ПФЭ данной задачи (Рис. 3).

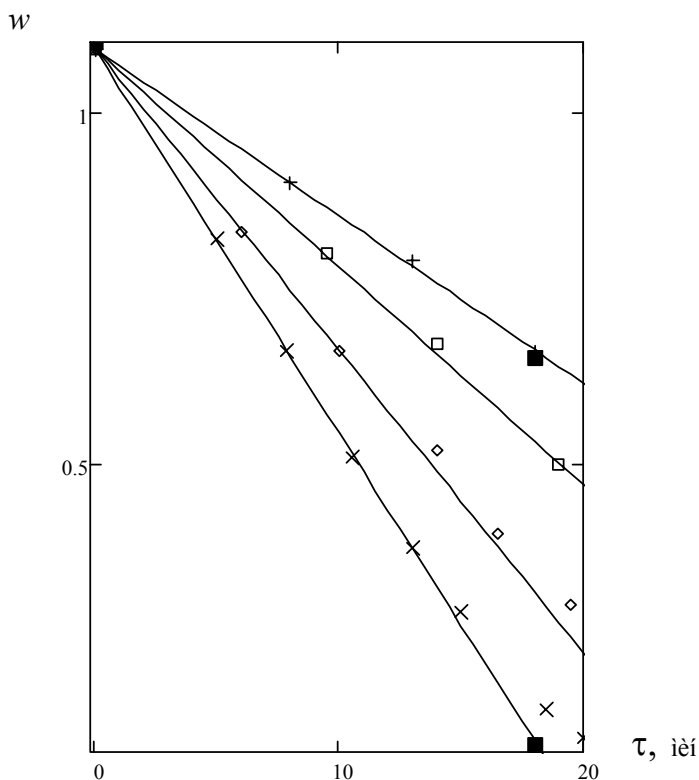


Рис. 4. Сравнение расчета по уравнению регрессии с экспериментальными данными по кинетике сушки хлопчатобумажной ткани в 1-м периоде для четырех температур (Таблица 2) [5].

Как следует из рисунка 4, опытные точки экспериментов [5] хорошо соответствуют расчетным линиям, построенным по уравнению регрессии (6). Сравнение расчета по уравнению (7) с теми же экспериментальными данными [5] по скорости сушки для 4-х температур проведено ниже в Таблице 3.

Таблица 3.

Сравнение расчета скорости сушки по уравнению (7) с экспериментальными данными [5].

Температура сушильного агента, °С	Скорость сушки хлопчатобумажной ткани $N$ , 1/мин		
	Эксперимент	Расчет по уравнению (7)	Отклонение, %
48	0.02375	0.02444	-2.9
56.3	0.03053	0.03169	-3.8
70	0.04333	0.04365	-0.74
83.5	0.0540	0.05544	-2.7

Из Таблицы 3. также следует, что расчет хорошо соответствует эксперименту. Отклонения не превышают 3,8 %, что лежит в пределах точности опытов. На рис.5 в графической форме представлено сравнение расчета скорости сушки по уравнению (7) с экспериментальными данными [5]. Из рис. 5 видно, что эксперимент подтверждает для рассмотренного диапазона температур линейную зависимость скорости сушки от температуры.

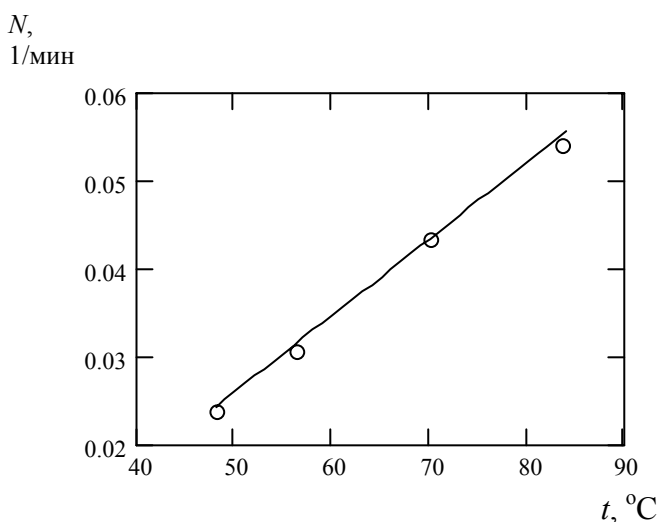


Рис. 5. Сравнение расчета скорости сушки по уравнению (7) с экспериментальными данными [5].

Таблица 4.

Параметры 1-го периода сушки хлопчатобумажной ткани

Температура сухого термометра $t$ , °С	Температура мокрого термометра $t_M$ , °С	Скорость теплоносителя $v$ , м/с	Теплота испарения $r$ , кДж/кг	Скорость сушки $N$ , 1/мин	Кэф. теплоотдачи $\alpha$ , Вт/(м <sup>2</sup> ·К)
48	33	0.148	2385	0.02444	14.234
56.3	36.3	0.164	2365	0.03169	13.727

70	43	0.180	2333	0.04365	13.816
83.5	45.5	0.203	2301	0.05544	12.297

По известным значениям скорости сушки из уравнения (8) могут быть рассчитаны значения коэффициентов теплоотдачи  $\alpha$ . В таблице 4 приведены параметры сушильного агента для 4-х значений температур [5] и расчетные значения коэффициентов теплоотдачи  $\alpha$ .

Аналогичные расчеты на основе полученного общего уравнения регрессии (4) для процесса сушки в 1-м периоде были выполнены для описания выполненной нами кинетики сушки деформируемого шлама, полученного после его осаждения в отстойнике [6]. Сушка проведена в туннельной сушилке с параллельным потоком воздуха при 4-х различных температурах и в постоянной скорости воздуха в сушилке 0.65 м/с [6].

Кинетика сушки шлама в 1-м периоде также описывается линейной зависимостью влагосодержания материала  $w$ , (кг влаги/кг сух. материала) от времени процесса  $\tau$ . Поэтому для получения математического описания сушки может быть использован план 1-го порядка.

Процесс сушки шлама зависит от двух параметров: температуры горячего воздуха  $t$  и времени процесса  $\tau$ . Будем искать уравнение регрессии для процесса сушки при изменении времени от 0 до 80 мин. и изменения температуры в интервале 80 - 112 °С. Исходные данные для опыта, значения в центре плана и интервал варьирования представлены ниже в таблице 5.

Таблица 5.

Исходные данные ПФЭ для процесса сушки шлама

Переменные процесса	Min (-)	Max (+)	В центре плана	Интервал варьирования ( $\delta$ )
Температура $t$ , °С	80	112	96	16
Время $\tau$ , мин	0	80	40	40

Составим матрицу ПФЭ для сушки шлама согласно таблице 5, для двух факторов с учетом члена двойного взаимодействия факторов. Матрица представлена на рис. 6.

$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_1 X_2$	$y$
+	-	-	+	2.65
+	+	-	-	2.65
+	-	+	-	1.31
+	+	+	+	0.49

Рис. 6. Матрица планирования ПФЭ для сушки шлама.

Здесь  $y$  представляет текущее значение влагосодержания;  $X_1$  и  $X_2$  - две закодированных переменные для входных параметров (факторов) – температуры и времени, соответственно.

Начальное влагосодержание материала составляет  $w_0 = 2.65$  кг/кг для двух температур плана при 80 и 112 °С (табл. 5). Необходимо провести только 2 опыта по определению влагосодержания при заданных температурах в момент времени  $\tau = 80$  мин. В результате проведенных опытов найдены соответствующие значения влагосодержания 1.31 и 0.49 кг/кг. Все значения функции влагосодержания  $y$  приведены выше в матрице планирования. Соответствующее ПФЭ уравнение регрессии как и для хлопчатобумажной ткани имеет вид

уравнения (1), а его решение, с учетом перехода от кодированных переменных к исходным, как показано выше имеет вид (4).

Подставим приведенные в матрице (Рис.6) значения влагосодержаний в общее уравнение регрессии для процесса сушки в 1-м периоде (4), в результате получим

$$w = 2.65 - \frac{2 \cdot 2.65 - 1.31 - 0.49}{4} \cdot \frac{\tau}{40} - \frac{1.31 - 0.49}{4} \cdot \frac{t - 96}{16} \cdot \frac{\tau}{40}. \quad (9)$$

После преобразований имеем уравнение кинетики в виде

$$w = w_0 + 0.00887 \cdot \tau - 0.0003203 \cdot t \cdot \tau. \quad (10)$$

Дифференцируя уравнение (10) по времени можно получить зависимость для скорости процесса сушки шлама в первом периоде.

$$\frac{dw}{d\tau} = 0.00887 - 0.0003203 \cdot t. \quad (11)$$

Из уравнения (10) следует, что влияние температуры на процесс сушки учитывает только последний член уравнения, отражающий двойное взаимодействие влияющих факторов. На Рис. 7 показано сравнение вычислений, использующих уравнение (10) с экспериментальными данными [6] для конвективной сушки шлама в 1-ом периоде для четырех температур. Значения этих температур и соответствующие им обозначения опытных точек (рис. 7) приведены в таблице 6.

Таблица 6

Температуры и обозначение опытных данных [6], приведенных на Рис. 7.

Температура t, °C	80	90	100	112
Обозначение опытных точек	◇	o	+	□

Прямые линии проведены через три жирных точки, которые отмечают значения, определенные согласно ПФЭ. Из рис. 7 следует, что прямые линии, построенные по ПФЭ соответствуют экспериментальным точкам, полученным для всех 4-х температур, однако согласование менее точное, чем в опытах по сушке хлопчатобумажной ткани. Это означает, что метод может успешно использоваться, чтобы определить кинетику сушки деформируемых материалов при минимуме экспериментальных данных.

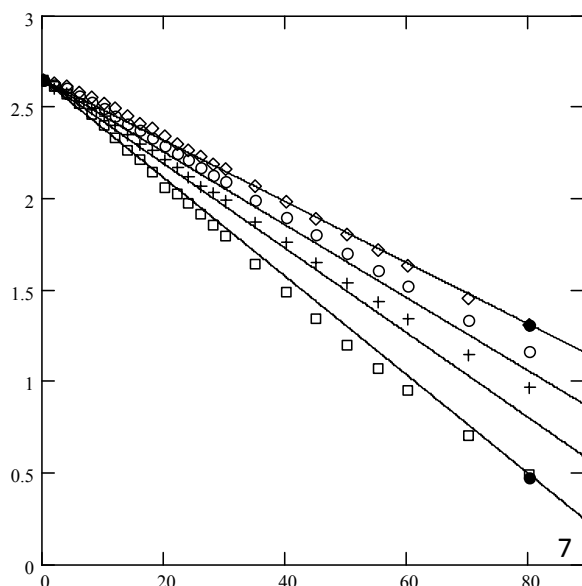


Рис. 7. Сравнение вычислений, использующих уравнение (6) с экспериментальными данными по конвективной сушке шлама для четырех температур.

$\tau, \text{ìèì}$

Таким образом, применение метода планирования эксперимента позволяет построить общую математическую модель температурной зависимости для 1-го периода процесса сушки и найти численные значения параметров этой модели при минимуме проведенных опытов (всего два опыта). Преимуществами использованного метода ПФЭ являются простота решения полученной системы уравнений, оценки параметров и статистической избыточности количества измерений, которая уменьшает влияние погрешностей отдельных измерений на оценку параметров.

Показано на примерах сушки хлопчатобумажной ткани и шлама, что для иллюстрации технологических систем, оценка параметров которых актуальна с практической точки зрения, могут служить различные процессы сушки. Найдено, что расчетные значения полученные методом ПФЭ достаточно хорошо отражают использованные экспериментальные данные, что означает, что этот метод может успешно использоваться для определения кинетики, скорости сушки и влияния температуры сушки при проведении ограниченного числа экспериментов.

### Обозначения

$N$  – скорость сушки, 1/мин;  $n$  – количество факторов;  $r$  - теплота испарения, кДж/кг;  $t$  – температура, °С;  $v$  - скорость теплоносителя, м/с;  $w$  – влагосодержание материала, кг/кг;  $x$  – влияющий фактор;  $y$  – определяющий фактор;  $\alpha$  - коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $\delta$  – интервал варьирования;  $\tau$  – время, мин.

### Литература.

1. Павлюкевич Н.В. Введение в теорию тепло- и массопереноса в пористых средах. Минск, 2003. 140 с.
2. Ефремов Г., Марковски М., Бялобзевски И. Макрокинетика процессов сушки. М.: Изд-во МГОУ, 2009. 335 с.
3. Закгейм А.Ю. Введение в моделирование химико-технологических процессов. М.: Логос, 2009. 302 с.



4. Фролов В.Ф. Моделирование сушки дисперсных материалов. Л.: Химия, 1987. 207 с.
5. Филоненко Г.К. Кинетика сушильного процесса. М.: Оборонгиз, 1939. 138 с.
6. Reyes A., Eckholt M., Troncoso F. and Efremov G. 2004. Drying Kinetics of Sludge from a Wastewater Treatment Plant, *Drying Technology*, 22(9), 2135-2150 pp.