УДК 536.24:532.526:533.001.16

РАСШИРЕНИЕ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ УРАВНЕНИЙ СЛОЖНОГО (РАДИАЦИОННОГО И КОНВЕКТИВНОГО) ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В. М. Репухов

Институт технической теплофизики Национальной Академии Наук Украины, г. Киев

Введение

Целью работы является общий метод расширения решения интегро-дифференциальных уравнений сложного переноса (прообраз, радиационный и конвективный), когда используется решение уравнений в простейших условиях (образ, величины с верхней чертой) и квазилинейное преобразование с дефектом канонических транспортных уравнений одной формы движения в другую (видов формы); а также система уравнений-условий расширения [1-4].

В ортонормированном базисе вещественного пространства существует единая каноническая запись линий переноса (линии тока, лучи) и транспортных уравнений в молекулярном ($\rho = var$) и фотонном ($\rho = 1$) континуумах с точностью до вектора переноса соответственно:

$$(ds/V_s =) \;\; dx/u = dy/v = dz/w = dt/1 \text{ и } L_V(a_*) \equiv \rho(\vec{V}_T \circ \mathrm{grad}_T a_*) = \mathrm{div}_T \, \vec{b}_{*T} \equiv R_D(a_*)\,, \tag{1}$$

где $L_V(a_*) = \rho a_*(\vec{V}_T \circ \mathrm{grad}_T \ln a_*)$ и $R_D(a_*) = \dfrac{\partial b_{*t}}{\partial \alpha_*} + \mathrm{div}\vec{b}_*$ или $R_D(a_*) = \int_V F_V dV$ – левые и правые функционалы, однозначно связанные между собою; a_* и $*$ – транспортируемая величина и индекс соответствуют плотности среды, проекциям скорости, полной энтальпии, спектральной и полной яркости вдоль линии переноса, объемной плотности энергии излучения и другим ($\rho, u, v, w, h^0, I_{\nu\tau}, I_{n\tau}, u_\nu, u_n, ...$); $\vec{V}(u,v,w)$, $\vec{V}_T(1,u,v,w)$, $\vec{b}_*(b_{*x}, b_{*y}, b_{*z})$, $\vec{b}_{*T}(b_{*t}, b_{*x}, b_{*y}, b_{*z})$, $\mathrm{grad} a_*$ и $\mathrm{grad}_T a_*$ – трех- и четырехмерные (индекс T) скорости, векторы переноса и градиенты величин; индексы $*$ и α – обычно заменяются целыми числами, сочетаются с координатами в левой части $\alpha = t, x, y, z$ и правой $\alpha = \alpha_*, x, y, z$ с выбором $\alpha_* = t, x, y, z$ при задании $b_{*t} (= b_{*\alpha_*} = P_{\alpha_*})$ в базисе Декарта или $\alpha = t, \tau, \nu, \beta$ в подвижном трехграннике Френе [3].

Преобразование канонической системы переноса основано на том, что пространство в малом евклидово и пространства одной размерности изоморфны, а время единая мера всех форм движения количества линейной величины в элементарном объеме ($\rho a_* \Delta V$) при двух параметрах (расстояние, время). Проекции вектора скорости являются решениями нелинейных транспортных уравнений и коэффициентами отличной от нуля линейной комбинации из проекций полного четырехмерного дифференциала радиус-вектора точки на линии переноса, а уравнения отражают воздействие линейных векторов переноса на содержание объема [3,4].

Обратимое квазилинейное вещественное (комплексное) самосопряженное преобразование канонических транспортных уравнений с дефектом над полем функций сохраняет форму записи этих уравнений в малой окрестности сходственных точек континуумов с различными свойствами и границами, и интерпретируется как движение системы отсчета прообраза к системе образа с сохранением формы записи уравнений. Рассматриваются молекулярный континуум (нижний индекс m), спектральный с осреднением величин по направлениям (индексы ν и νm) и полный с дополнительным суммированием по частотам (индекс n).

Основные результаты

Уравнения молекулярного и спектрального континуума хорошо известны [1,2], как и связь скоростей в среде $\vec{c}_{\nu T} \equiv \vec{V}_T$, $\vec{c}_\nu \equiv \vec{V}$ и вакууме $\vec{c}_0 \equiv \vec{V}_0$, тензоров преломления $N_{\nu T}$ с матрицей четвертого ранга $[n_{\nu T}] = [1, n_{\nu xx}, n_{\nu yy}, n_{\nu zz}]$ и N_ν третьего $[n_\nu] = [n_{\nu xx}, n_{\nu yy}, n_{\nu zz}]$ в виде [3]:

$$N_\nu \vec{c}_\nu = E\vec{c}_0 \text{, или } \vec{n}_\nu \equiv \vec{c}_0 / c_{\nu\tau} = N_\nu \vec{\tau}\text{, } \operatorname{div}(\vec{N_\nu c_\nu}) = \operatorname{div}\vec{c}_0 = 0 \text{ и } E\,\vec{LN}_\nu \equiv N_\nu^{-1}\mathrm{Div}N_\nu; \tag{2}$$

$$N_\nu^{-1}\mathrm{Div}N_\nu \vec{c}_\nu + E\operatorname{div}\vec{c}_\nu = 0 \text{, а также } (LN_\nu \circ \vec{c}_\nu) + \operatorname{div}\vec{c}_\nu = 0 \text{ и } \eta_{\nu\tau}/k_\nu = (\operatorname{mod}\vec{N_\nu}\tau)^2 I_{b\nu 0} \tag{3}$$

– соответственно линейное самосопряженное преобразование скоростей, или вектор показателя преломления, условие опорного луча постоянной скорости в вакууме и вектор-столбец преломления; причем нулевая дивергенция скорости в вакууме (2) позволяет выделить уравнение неразрывности луча, а также равенство для дивергенции скорости в среде (3) и закон Кирхгофа локального термодинамического равновесия вдоль луча ($\varepsilon_{\nu\tau}/k_\nu = (\eta_{\nu\tau}/I_{b\nu 0})/k_\nu$).

Каноническое транспортное уравнение (1) можно получить, учитывая: модель действия на элемент ($\rho a_* \Delta V$) напряжений переноса с тензором B_* и полные производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_F} \rho a_* E\vec{e}\,dV = \int_F B_* \vec{n}_F\,dF = \int_{V_F} \mathrm{Div}B_* dV \text{ и} \tag{4}$$

$$\frac{d[(a_*\rho\Delta V)E\vec{e}]}{(a_*\rho\Delta V)dt} = E\vec{e}\left[\frac{d\ln a_*}{dt} + \frac{d\ln(\rho\Delta V)}{dt}\right] + \frac{dE\vec{e}}{dt} = \left[\frac{E\vec{e}}{a_*}\operatorname{div}_T(\rho\vec{V}_{eT}a_*)\right] + V_e\frac{dE\vec{e}}{ds_e}\Bigg|_{\substack{V_e=c_{\nu e}\\ \text{при } \rho=1;\\ \vec{e}=\vec{\tau}}} \to$$
$$\to \vec{\tau}(\vec{V}_{\tau T}\circ \operatorname{grad}_T \ln a_*) - V_\tau(\vec{\tau}\,LN_{\nu\tau} - \vec{\nu}\,k_{1\nu}) - V_\nu\,\vec{\nu}(LN_{\nu\nu} - k_{1\nu}) - V_\beta\,\vec{\beta}(LN_{\nu\beta} - k_{2\nu}) + \vec{\Delta}^{\text{остаток}}_{V_\nu, V_\beta}, \tag{5}$$

где вторая содержит скалярное произведение, деформации объема и регулярной линии с потерей решений $LN_{\nu\nu} - k_{1\nu} = 0$ и $LN_{\nu\beta} - k_{2\nu} = 0$; $k_{1\nu}$ и $k_{2\nu}$ – кривизна и кручение линии по Френе; используется сумма трех преобразований, эквивалентных преобразованию опорного луча, а углы Эйлера и группа вращения связывают проекции вектора преломления [3].

Опорным лучам предельных однородных полей вакуума ($c_{\nu 0}, I_{\nu 0}$) соответствуют в точке P среды неоднородные поля (c_ν, I_ν), равенства типа (2), исходные тензоры ($N_\nu, N_{\nu I}$) и векторы преломления; а максимальный вектор поля определяет эллипсоид с полуосями из собственных векторов; причем аналогично рассматриваются все линейные векторы [4]. Элементы исходных матриц связываются тремя множителями $k_{\nu\alpha} \equiv n_{\nu\alpha I}/n_{\nu\alpha}$, которые определяют связь векторов преломления с учетом соответствующих транспортных уравнений, неоднородной линейной системы группы вращения и (5) для кривизны и кручения общего луча; постоянные множители уравнивают векторы преломления и $R_D(c_{\nu\tau})/c_{\nu\tau} = R_D(I_{\nu\tau})/I_{\nu\tau}$ [3].

Точке P на линии переноса соответствует закон яркости в виде максимальной яркости $I_\nu^0(P)$ и индикатриса яркости падающего излучения $p_\nu^0(s,P) = I_\nu / I_\nu^0$, который при индикатрисе рассеяния $p_\nu(s' \to s)$ задается яркостью на границе объема, и наоборот [1-3]. При полной яркости $I_n = \sum_\nu I_{\nu n}$ осредненному тензору $N_{\nu n} = n_{\nu n} E$ соответствуют средние величины:

$$c_{\nu n} = \frac{c_0}{n_{\nu n}},\ I_{\nu n} \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} I_\nu d\Omega,\ u_\nu = \frac{4\pi I_{\nu n}}{c_{\nu n}},\ \Sigma_\nu = c_{\nu n} u_\nu,\ H_{\nu\tau} = \frac{I_\nu^0}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} p_\nu^0(s') p_\nu(s' \to s) d\Omega', \quad (6)$$

а когерентность, закон сохранения энергии и полное давление замыкают спектральную систему, что определяет поле температуры, согласующейся со средней величиной $n_{\nu n}$ [1-3].

Если луч предельный пучок гомоцентрических линий с превращением энергии внутри него, а соседние обмениваются лишь энергией излучения; то поперечной неравномерностью в последнем равенстве (5) можно пренебречь, считая элементы матриц свойствами среды [3].

Обобщение коэффициентов ослабления $\beta_{\nu\tau}$ и поглощения $k_{\nu n}$ уточняет функционалы

$$R_D(\rho) \equiv -\rho^2 \operatorname{div}\vec{V}, \text{ включая } R_{D0}(\rho_i) \equiv Q_i;\ \vec{R}_D(\vec{V}) \equiv -\operatorname{grad}(p+\varphi_f) + \operatorname{Div}\vec{T};\ R_D(m_j^0) \equiv -\operatorname{div}\vec{J}_j^0; \quad (7)$$

$$R_D(c_{\nu\tau}) \equiv c_{\nu\tau}^2 L N_{\nu\tau} + R_{D0}(c_{\nu\tau}), \text{ или } k_{0\nu}(s_\nu) = LN_{\nu\tau},\ k_{1\nu}(s_\nu) = LN_{\nu\nu} \text{ и } k_{2\nu}(s_\nu) = LN_{\nu\beta}; \quad (8)$$

$$R_D(I_{\nu\tau}) \equiv I_{\nu\tau} c_{\nu\tau} k_{0\nu} + R_{D0}(I_{\nu\tau}) = c_{\nu\tau}(\eta_{e\nu\tau} - \beta_{\nu\tau} I_{\nu\tau});\ R_D(u_\nu) \equiv k_{0\nu n}\Sigma_\nu + R_{D0}(u_\nu) = 4\pi\eta_{\nu n} - k_{\nu n}\Sigma_\nu; \quad (9)$$

$$R_D(u_n) \equiv k_{0n}\Sigma_n + R_{D0}(u_n) = 4\pi\eta_n - k_n\Sigma_n \text{ и } R_D(h_m^0) = \frac{\partial(p+\varphi)}{\partial t} - \operatorname{div}\vec{Q}_m + k_{nq}\Sigma_n; \quad (10)$$

уравнения интегрального решения в замкнутом объеме с учетом направления луча, где $k_\nu = k_{\nu p} + k_{\nu q}$ – объемная поглощающая способность энергии излучения с переходом в работу и теплоту; $\beta_{\nu\tau} = k_\nu - k_{0\nu} + \sigma_\nu$, $k_{\nu n} = k_{\nu n0} - k_{0\nu n}$, $\beta_{\nu 0}$, $R_{D0}(I_{\nu\tau})$ и $R_{D0}(u_\nu)$ – локальные величины анизотропной среды и в форме записи однородной (индекс 0), а также общепринятые [1-3].

Формализм преобразования уравнений (1) всех видов движения разных форм одинаков при искомых основных функциях преобразования и заданных дополнительных в виде:

$$f_\tau \equiv \frac{\partial\bar{t}}{\partial t},\ f_x \equiv \frac{\partial\bar{x}}{\partial x},\ f_y \equiv \frac{\partial\bar{y}}{\partial y},\ f_z \equiv \frac{\partial\bar{z}}{\partial z},\ f_* \equiv \frac{a_*}{\bar{a}_*} \text{ и } f_{b_{*T\alpha}} \equiv \frac{b_{*T\alpha}}{\bar{b}_{*T\alpha}}, \quad (11)$$

которые в малой окрестности точек определяют линейные пространства транспортируемых величин, расстояний и векторов переноса, но нелинейные для градиента и дивергенции [3].

Функционалы образа из функционалов прообраза можно выделить формально при линейной замене координат с обратной матрицей $[C]^{-1}$ алгебраическими операциями [3]: $L_V - \bar{f}_*\bar{L}_V = s_*$ и $R_D - \bar{f}_*\bar{R}_D = S_{*T}$ при $\bar{S}_{*T} = \bar{s}_*$, или $\bar{S}_* = \bar{s}_* + \bar{P}_*$. Причем свертка и переход к следу (оператор Sp) в скалярном произведении оператора Гамильтона и матрицы тензора напряжений дают указанные действия с функционалами и транспортные уравнения в виде:

$$[\rho a_* G a_*](V_T)' = (Sp([b_{*T\alpha}][Gb_{*T\alpha}]))' \text{ и } [\overline{\rho a_*}\,\overline{Ga_*}](\bar{V}_T)' = (Sp([\bar{b}_{*T\alpha}][\overline{Gb}_{*T\alpha}]))', \quad (12)$$

$$\text{где } \bar{f}_* \equiv f_* f_\rho f_\tau = \frac{s_*}{\bar{s}_*} = \frac{S_{*T}}{\bar{S}_{*T}} = \frac{S_*}{\bar{S}_*} = \frac{P_*}{\bar{P}_*} \text{ и } 1 \cdot \frac{\partial\bar{t}}{\partial t} = f_u \frac{\partial\bar{x}}{\partial x} = f_v \frac{\partial\bar{y}}{\partial y} = f_w \frac{\partial\bar{z}}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\frac{s_*}{\rho a_*}=(\vec{V}_T\circ\vec{\Phi}_*) \text{ и } S_{*T}=-\bar{f}_*\sum_{\bar{\alpha}}\bar{C}_{*T\alpha}\frac{\partial\bar{b}_{*T\alpha}}{\partial\bar{\alpha}}, \text{ или } \bar{P}_*=-\bar{C}_{P\alpha*}\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{\alpha}_*} \text{ и } \bar{S}_*=-\sum_{\bar{\alpha}}\bar{C}_{*\alpha}\frac{\partial\bar{b}_{*\alpha}}{\partial\bar{\alpha}}, \qquad (14)$$

$$\Phi_{*\alpha}(a_*)\equiv\frac{\partial\ln a_*}{\partial\alpha}-\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial\alpha}\frac{\partial\ln\bar{a}_*}{\partial\bar{\alpha}}=\frac{\partial\ln f_*}{\partial\alpha}-\sum_{\alpha_k\neq\bar{\alpha}}\frac{\partial\ln\bar{a}_*}{\partial\bar{\alpha}_k}\frac{\partial\bar{\alpha}_k}{\partial\alpha} \text{ и } \bar{C}_{*T\alpha}\equiv 1-\frac{1}{\bar{f}_*}\frac{\partial b_{*T\alpha}}{\partial\alpha}/\frac{\partial\bar{b}_{*T\alpha}}{\partial\bar{\alpha}} \qquad (15)$$

– соответственно системы транспортных уравнений (12) прообраза и образа в матричной форме при проекциях многомерного вектора a_*; обобщенная функция и основные уравнения-условия преобразования (13), а также дефекты (14), однозначно представляемые скалярными произведениями с помощью векторов преобразования и коэффициентов дефектов (15); $[Ga_*]\equiv[\frac{\partial\ln a_*}{\partial\alpha}]$, $[Gf_*]\equiv[\frac{\partial\ln f_*}{\partial\alpha}]$, $[Gb_{*T\alpha}]\equiv[\frac{\partial\ln b_{*T\alpha}}{\partial\alpha}]$, $[Gf_{b_{*T\alpha}}]\equiv[\frac{\partial\ln f_{b_{*T\alpha}}}{\partial\alpha}]$ и $f_T\equiv\frac{d\bar{t}}{dt}$ – матрицы со столбцами $\alpha=t,x,y,z$ и строками $*$, или строками $*T\alpha=*\alpha_*,*x,*y,*z$ при равенствах $b_{*t}=b_{*\alpha*}$, а также функция, которая связывает параметры времени транспортных уравнений образа и прообраза; $[Ga_*]=[\overline{G}\bar{a}_*][C]^{-1}+[Gf_*]$, $[Gb_{*T\alpha}]=[\overline{G}\bar{b}_{*T\alpha}][C]_*^{-1}+[Gf_{b_{*T\alpha}}]$, $[a_*]=[\bar{a}_*][f_*]$, $[b_{*T\alpha}]=[\bar{b}_{*T\alpha}][f_{b_{*T\alpha}}]$, $[f_V]\equiv[1,f_u,f_v,f_w]$ и $(V_T)'=[f_V](\bar{V}_T)'$ – уравнения связи, которых нет при подсчете уравнений-условий, так как они следствия функций (11) и векторов переноса, а нелинейность преобразования проявляется в виде сумм в первых уравнениях [3].

На первом этапе линейность полных дифференциалов при замене переменных и соответствующая система линейных уравнений дают в малом линейное преобразование дифференциала четырехмерного радиус-вектора линии переноса, а также введенного класса скоростей над полем основных и дополнительных функций преобразования (11); причем линейная замена базиса и линейные преобразования в исходном (старом) базисе записываются:

$$(\vec{\bar{e}}_t,\vec{\bar{e}}_x,\vec{\bar{e}}_y,\vec{\bar{e}}_z)=(\vec{e}_t,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)[C],\ (d\bar{r}_T)'=[C]^{-1}(dr_T)' \text{ и } (\bar{V}_T)'=[C]^{-1}(V_T)'/f_T. \qquad (16)$$

с вещественной матрицей $[C]^{-1}=[H][U]$ и $[H]^2=[H][H]^*=[C]^{-1}([C]^*)^{-1}$, где $[U]$ и $[H]$ – соответственно матрицы унитарного и положительно определенного преобразования [4].

На втором этапе основные уравнения-условия (13) и дефекты (14) допускают самосопряженные преобразования с группой матриц $[C]^{-1}=[|f_V/f_\tau|]^{-1}[U]$ и $[H]=[|f_V/f_\tau|]^{-1}$, обеспечивают у образа диагональные определители Грама с сохранением ортонормированного базиса, формы скалярного произведения, дивергенции и функционалов, а при равенстве дефектов – транспортных уравнений. В результате евклидово пространство с ортонормированным базисом деформируется по координатным осям с единичной проекцией скорости на оси времени и инвариантным подпространством трехмерных векторов расстояний с параметрами время и направление, включающем упорядоченные линии переноса по Френе [3,4].

На третьем этапе выбирается связь сходственных точек на линиях переноса молекулярного и спектрального евклидовых континуумов. Для конкретной пары прообразов из различных континуумов и заданных в них квазилинейных преобразованиях с дефектом можно рассмотреть на пересечении линий переноса с вершинами в сходственных точках треугольники скоростей прообразов V, C и образов $\bar{V}$, $\bar{C}$, где соответствующие матрицы преобразований обозначаются $[f_V] \equiv [f_{V\overline{V}}] = [1, \dfrac{V_x}{\overline{V}_x}, \dfrac{V_y}{\overline{V}_y}, \dfrac{V_z}{\overline{V}_z}]$ и $[f_C] \equiv [f_{C\overline{C}}] = [1, \dfrac{C_x}{\overline{C}_x}, \dfrac{C_y}{\overline{C}_y}, \dfrac{C_z}{\overline{C}_z}]$, а прообразы имеют угол пересечения $\Delta\varphi$ и высоту треугольника $h = V\cos\varphi$ [3,4].

На линиях переноса, включая точки пересечения, преобразования (11) и (16) прообраза V к прообразу C с матрицами $[f_{VC}]$ и $f_{TCV}^{-1}[C_{CV}]^{-1}$ (образ $[f_{\overline{V}\overline{C}}]$ и $f_{T\overline{C}\overline{V}}^{-1}[C_{\overline{C}\overline{V}}]^{-1}$) всегда допускают [3,4]: во-первых, совмещение направления скоростей группой вращения и их модулей с матрицами $[U]_{CV}$ и $[H]_{CV}$; во-вторых, общие и специальный (зеркальный) линейные циклы

$$(f_{TCV}^{-1}[C]_{CV}^{-1})^{-1}[f_{C\overline{C}}](f_{T\overline{C}\overline{V}}^{-1}[C]_{\overline{C}\overline{V}}^{-1})[f_{V\overline{V}}]^{-1} = [E] \text{ и } (f_{TV\overline{C}}^{-1}[C]_{V\overline{C}}^{-1})[f_{V\overline{V}}](f_{TC\overline{V}}^{-1}[C]_{C\overline{V}}^{-1})[f_{C\overline{C}}] = [E], \quad (17)$$

где $(f_{TCV}^{-1}[C]_{CV}^{-1})^{-1}[f_{C\overline{C}}] = f_{TV\overline{C}}^{-1}[C]_{V\overline{C}}^{-1}$, $(f_{TCV}^{-1}[C]_{CV}^{-1})[f_{V\overline{V}}] = f_{TC\overline{V}}^{-1}[C]_{C\overline{V}}^{-1}$ и $[f_{V\overline{V}}]f_{T\overline{V}V}^{-1}[C]_{\overline{V}V}^{-1} = [E]$; в-третьих, три условия ортогонального преобразования зеркального совмещения плоскостей треугольников и три, включая первое (17), для соответствующих скоростей (общий базис).

Ортогональное преобразование допускает единый ортонормированный базис и темп времен $f_{TCV}f_{T\overline{C}\overline{V}}^{-1} = f_{TV\overline{C}}f_{TC\overline{V}}^{-1} = 1$, комплексную матрицу $[C]_k^{-1} = [C]_{CV}^{-1} + i[C]_{\overline{C}\overline{V}}^{-1}$ и вещественную $[U]$ из диагональных клеток простого отражения в подпространстве расстояний и вращения:

$$[U]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } [U]_2 = \begin{bmatrix} \cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi \\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi \end{bmatrix}, \text{ причем } [U]_{2k} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\varphi & -i\sin\Delta\varphi \\ i\sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi \end{bmatrix} \quad (18)$$

и $[H]_k^2 = [|f_V|]^{-1}[|f_C|]^{-1} = [E]$ – для самосопряженных комплексных специальных преобразований (17) и (18) [4]. Они определяют $[f_V] \equiv [f_{V\overline{V}}] = [f_{C\overline{C}}]^{-1} \equiv [f_C]^{-1}$, $[f_{VC}] = [f_{\overline{V}\overline{C}}]^{-1}$ и задают зеркальные скорости $V/C = \overline{C}/\overline{V}$, совмещают с треугольником на двух скоростях прообраза лежащий в его плоскости треугольник образов при вершине в сходственной точке, равных углах $\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ и высотах $h = c_+\cos\varphi_+ = c_-\cos\varphi_-$, где упорядочены $c_+ = C \geq V = c_-$ и $\dfrac{c_-}{c_+} = \dfrac{\cos\varphi_+}{\cos(\varphi_+ - \Delta\varphi)}$, или $\mathrm{tg}\Delta\varphi = (\dfrac{c_-}{c_+}\sin\Delta\varphi)/[1 - (\dfrac{c_-}{c_+}\sin\Delta\varphi)\mathrm{tg}\varphi_+]$; а частные условия $\varphi_- = 0$ и $\Delta\varphi = \pi/2$ с учетом связи $\mathrm{tg}\theta = -iV/C$, теоремы Пифагора $\cos\theta = 1/\sqrt{1 - V^2/C^2}$, прообраза $\vec{r}_k(iCt; x)$ и образа $\vec{\overline{r}}_k(iC\dfrac{t - xV/C^2}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}; \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/C^2}})$ дают преобразование Лоренца с матрицей $[C]_k^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} & \dfrac{-iV/C}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \\ \dfrac{iV/C}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \end{bmatrix}$ и

$$\begin{cases} x^2 - C^2t^2 = \dfrac{(x - Vt)^2}{1 - V^2/C^2} - C^2\dfrac{(t - xV/C^2)^2}{1 - V^2/C^2} = x^2 - C^2t^2 \\ \text{- сохранение скалярного произведения [2,4].} \end{cases}$$

Закон сохранения массы молекулярного источника компонента $a_* = \rho_i$ и энергии излучения $a_* = u_n$ ($k_{n0} = 0$) имеют одинаковые по форме уравнения (7) и (10), что в сходственных точках с учетом скоростей и производительностей источников, равенства температур в преобразовании (18) и уравнении Планка дает эквивалентность энергии и массы $\bar{u}_n = \bar{\rho}_i C^2$ [2,3].

Уравнения Максвелла согласуются с моделью (4), (5), (8) $-$ (10) переноса излучения; а преобразование уравнений и лучей анизотропного поля к одной линии переноса в сходственных точках с молекулярным полем, его тензором напряжений и граничными условиями.

Основная система уравнений-условий преобразования пяти первых транспортных уравнений молекулярного континуума двухкомпонентной смеси $(* = u, v, w, m_j, h)$ и спектрального фотонного $(* = k_{0\nu}, k_{1\nu}, k_{2\nu}, I_{\nu\tau}, u_{\nu\tau})$ совпадают по форме между собою и системой полного фотонного, приводятся к тридцати пяти уравнениям-условиям и неизвестным:

$$f_T \equiv \frac{d\bar{t}}{dt},\ [C_m]^{-1},\ [Gf_*]\big|_{*=\rho,u,v,w},\ f_{m_j},\ f_h \text{ и } f_{T\nu},\ f_{u_\nu},\ f_{I_{\nu\tau}},\ f_{H\nu},\ [f_{n_{\nu ii}}],\ [C_\nu]^{-1},\ [Gf_*]\big|_{*=c_{\nu x},c_{\nu y},c_{\nu z}}\ ; \quad (19)$$

причем основная система имеет следующие уравнения-условия соответственно [3]:
1) одиннадцать подсистемы, где семь одинаковые (основные уравнения-условия (13) и для сходственных линий переноса (1)) и четыре по одному для относительных полных концентраций $f_{m_j} = 1$ и плотности излучения $f_{u_\nu} = f_{I_{\nu n}} / f_{c_{\nu n}}$ (аддитивность и когерентность), полной энтальпии f_h и максимальной яркости $f^0_{I_{\nu\tau}}$, неразрывности линий переноса (3) и (7), а также законов состояния среды (Кирхгофа и, в частности, Клапейрона-Менделеева); 2) пять дефектов $S_{*T} = s_*$ согласно индексам преобразуемых уравнений и 3) девятнадцать коэффициентов дефектов по уравнениям (15), в том числе отражающих переход к матрицам типа (2).

Эквивалентные дополнительные уравнения-условия превращают коэффициенты дефектов в следствия. В молекулярном континууме удобно задавать относительные законы состояния и переноса $\Psi^0_Z \equiv Z/\bar{Z}$ и $\Psi^0_{*\alpha} \equiv b^0_{*\alpha} / \bar{b}^0_{*\alpha}$, где $Z = \rho h / p$; а в фотонных континуумах [3]:
1) восемь отношений $-$ для элементов матриц преломления скорости (2), свойств континуума ($f_{k\nu}, f_{\sigma\nu}, f_{p\nu}$), вакуума и когерентность ($f_{c_0} = f_\nu = 1$); 2) два отношения $-$ для закона Планка в вакууме и условно индикатрис яркости $f^0_{p\nu}$; 3) шесть связей $-$ типа (17) для проекций скоростей в сходственных точках характерных лучей спектрального и полного, а также направлений лучей образов и заданного направления; 4) две связи $-$ для отношения температур в сходственных точках и темпа времени $f_{T\nu} = f_{Tm}$ 5) одна связь $-$ энергии фотонных континуумов $\sum_\nu (f_{I_{\nu n}} \bar{I}_{\nu n}) / \bar{I}_n = f_{I_n}$ для величин (19) ($* = n$ $-$ замена на подобные величины с учетом (6), в частности, закона Планка на Стефана-Больцмана, а в последнем пункте связи энергий полными давлениями излучения с учетом $p_n \cong u_n / 3 = \Sigma_n / (3c_n)$, $k_{np} \cong V_m / (3c_n)$) [2,3].

Выводы

1. Существует каноническая запись системы линий переноса и транспортных уравнений для любой формы движения и ее видов с точностью до векторов переноса.
2. Канонические системы сохраняют свою запись в вещественном евклидовом пространстве четырех измерений при квазилинейном преобразовании с дефектом и группой

самосопряженных преобразований над множеством основных и дополнительных функций, которое использует основные уравнения-условия, относительные законы переноса транспортируемой величины и состояния среды континуума, обеспечивающие граничные условия образа.
3. Основная система уравнений-условий преобразования позволяет расширить решения простейших уравнений переноса и состоит: из подсистемы, определяющей основные функции преобразования по дефекту; уравнений-условий дефектов и дополнительных для коэффициентов дефектов, определяемых посредством относительных законов.
4. Для эквивалентных уравнений-условий используется разные формы правого функционала уравнений и законы, связанные с коэффициентами дефектов и условиями на границе.
5. Относительные законы переноса и состояния формируют поля транспортируемых величин (тензоры), включая спектральные с учетом закона сохранения энергии излучения, известные связи скорости, энергии и давления излучения; когда выделяются линии с максимальным локальным вектором и индикатрисой яркости (закон яркости) или наоборот условия на границе, а полный фотонный континуум играет вспомогательную роль.
6. Полнота непротиворечивость и замкнутость системы уравнений-условий обеспечивается учетом всех величин, входящих в транспортные уравнения, использованием методов линейной алгебры и однозначностью задачи Коши при представлении производных проекций векторов переноса коэффициентами дефектов.

Литература

1. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат. 1979. 416 с.
2. Бай-Ши-И. Динамика излучающего газа. М.: Мир, 1968. 350 с.
3. Репухов В. М. Метод и система уравнений-условий преобразования общих транспортных уравнений сложного (радиационного и конвективного) тепломассопереноса к простейшему виду// Радиационный и сложный теплообмен: Тр. пятой рос. нац. конф. по теплообмену. М.: МЭИ. 2010. Т. 6. С. 248-251.
4. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука. 1971. 280 с.